Der Frame–Budget–Ansatz (FBA)

Wie Zeit, Dynamik und Geometrie aus Budgetflüssen entstehen

Eine operative Brücke zwischen Quantenmechanik und Allgemeiner Relativitätstheorie

Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern

Dipl. Wirt.-Inf. Jens Tetzner

21. Januar 2026

Inhaltsverzeichnis

Teil VIII

Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern

VIII.1 Einleitung & Zielbild

VIII.1.1 Motivation

Der Frame–Budget–Ansatz (FBA)[1] zielt in diesem Teil auf eine *konsistente* Herleitung zweier Übergänge, die in Standarddarstellungen oft getrennt behandelt werden: (i) des *klassischen Limes* für (typischerweise) quantenoffene Systeme und (ii) des *thermodynamischen Pfeils* im unselektierten Bild. Der gemeinsame Kern ist dabei keine zusätzliche Dynamikannahme, sondern die Kombination aus zulässiger Mikrodynamik (CPTP/GKLS), wohldefiniertem Coarse–Graining und den daraus folgenden Informationsmonotonien (DPI/Spohn). Damit wird präzise, *in welchen Regimen* eine effektive klassische Beschreibung zulässig ist, und warum Irreversibilität im effektiven Bild als Konsequenz zulässiger Verarbeitung (statt als heuristisches Zusatzpostulat) erscheint.[2] [3] [4]

Wir trennen dabei bewusst (a) einen *mathematischen Limes* (z. B. Kontinuums-/Large-N-/Skalenlimes) von (b) einem *operativen Limes* (Messauflösung, Protokollklassen, zulässige Vergröberungen): Erst die operative Schicht macht Aussagen über „klassisch beobachtbar“ in endlicher Praxis robust.

Arbeitsbegriff: „klassisch“ im FBA

In Teil VIII heißt „klassisch“ nicht „$\hbar \to 0$ per Postulat“, sondern: Es existiert ein zulässiger Vergröberungskanal $\mathcal{R}$ (Coarse–Graining), so dass $p = \mathcal{R}(\rho)$ eine effektive (pointer-/protokollstabile) Zustandsbeschreibung liefert, deren Vorhersagen gegenüber zulässigen weiteren Verarbeitungen robust sind (DPI/Spohn). Der mathematische Limes (Kontinuum/Large-N/Skalen) dient nur dazu, *geschlossene* klassische Gleichungsformen (z. B. Fokker–Planck/Langevin) als Grenzbeschreibung herzuleiten; welche Größen „klassisch beobachtbar“ sind, entscheidet die operative Schicht.

Konkret zeigen wir: Aus CPTP-/GKLS–Dynamiken *zusammen mit* zulässigem Vergröbern (Dekohärenz, Pointer–Selektion, Markov-Schließung) *ergeben sich in geeigneten Grenz- und Schließungsregimen* effektive klassische Master-, Fokker–Planck- und Langevin–Gleichungen. Entropieproduktion und zweite-HS-Aussagen werden dabei als Konsequenzen des Datenverarbeitungspfeils (Spohn/DPI) im *unselektierten* Bild identifiziert (unter jeweils klar benannten Referenz-/Markovannahmen). Fluktuationssätze (IFT/Crooks/Jarzynski) werden anschließend als *Pfadversionen* formuliert, jedoch nur unter den jeweils explizit genannten Zusatzannahmen (Mikroreversibilität / lokale detailed balance und geeignete Randbedingungen). Darauf aufbauend definieren wir *Altern* als kalibrierte Akkumulation *irreversibler interner*

[1] Ein Überblick über alle Teile der FBA-Abhandlung inklusive Downloadlinks findet sich in Kapitel VIII.12 dieses Dokuments.

[2] Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschn. I.1–I.6.

[3] Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.2–IV.7.

[4] Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, insb. Kap. II.4 sowie Kap. II.6–II.7.

Budgetnutzung entlang einer Weltlinie und grenzen es gegenüber bloßer Eigenzeitakkumulation ab, weil nur so ein empirisch scharfes Maß für irreversible „Systemgeschichte“ entsteht, das nicht mit Kinematik (Zeitdilatation) verwechselt werden kann. (Entropien S werden dabei als informations-theoretische, *dimensionlose* Größen geführt; physikalische Entropien tragen ggf. den Faktor k_B, und $\beta = (k_B T)^{-1}$ wird nur dann verwendet, wenn T operational eingeführt ist.)

VIII.1.2 Logikpfad der Abhandlung

Der Aufbau ist so gewählt, dass die Kette von Mikrostruktur zu makroskopischer Beschreibung ohne Sprungstellen auskommt: Zuerst werden die zulässigen Operationen und ihre Monotonien fixiert, erst dann werden klassische Gleichungen und thermodynamische Aussagen als Folgen dieser Fixierungen (plus klar markierter Schließungs-/Kalibrationsannahmen) herausgezogen. Andernfalls würden klassische Dynamik und zweiter Hauptsatz wie zusätzliche Postulate wirken, statt als Konsequenzen zulässiger Verarbeitung.

1. *Abfolge & Budget:* Die geordnete Folge globaler Zustände mit Minimalereignissen trägt ein Budgetkalkül (intern/extern/irreversibel). Das ist der Ausgangspunkt, weil ohne Bilanz- und Zerlegungsstruktur weder „Kosten“ noch „Irreversibilität“ operativ definierbar wären.

2. *Zulässige Dynamik:* Auf Mikroebene sind Prozesse CPTP; im Zeitkontinuum verwenden wir (zeitlokale) GKLS–Beschreibungen im unselektierten Bild (bzw. präzise: solche effektiven Generatoren nur in Regimen, in denen eine CP-divisible, zeitlokale Beschreibung operational gerechtfertigt ist) und arbeiten mit thermisch motivierten Referenzen (stationär oder instantan, je nach Protokollklasse und Existenz einer geeigneten Referenz). Diese Ebene ist notwendig, weil wir den klassischen Limes aus erlaubten Mikrodynamiken ableiten wollen, nicht aus klassischen Annahmen.

3. *Coarse–Graining:* Ein zulässiger Vergröberungskanal $\mathcal{R}$ (operativ pointerstabil im jeweiligen Protokoll) erzeugt effektive klassische Zustände $p = \mathcal{R}(\rho)$; DPI/Spohn liefert Kontraktionen/Monotonien für zulässige Verarbeitung. Dieser Schritt ist der Mechanismus, der „effektive Klassizität“ erklärt: Klassische Zustände sind die stabilen, unter zulässiger Vergröberung robusten Träger der verbleibenden Information.

4. *Klassische Gleichungen:* Aus der Master–Gleichung folgen im Skalenlimes Kramers–Moyal / Fokker–Planck und äquivalente Langevin–Formen; der reversible Anteil liefert im geeigneten Grenzregime Liouville-/Hamilton–Dynamik (Ehrenfest–Limes). Hier wird sichtbar, warum unterschiedliche klassische Gleichungsformen nicht konkurrieren, sondern verschiedene Projektionen desselben Coarse–Graining–Bildes sind.

5. *Thermodynamischer Pfeil:* Entropieproduktion Σ ist im unselektierten GKLS-Bild nichtnegativ, *sofern* die jeweilige Referenz-/Stationaritätsstruktur (Spohn-Setting) erfüllt ist; Clausius- und Landauer-Ungleichungen folgen als budgetkalibrierte Konsequenzen. Fluktuationssätze (IFT/Crooks/Jarzynski) schließen daran an, jedoch nur unter expliziten Pfad-/Balanceannahmen. Dieser Schritt ist die eigentliche „Pfeil“-Aussage: Irreversibilität erscheint als Monotonie unter zulässiger Verarbeitung, nicht als Zusatzpostulat.

6. *Altern:* A wird als kalibriertes Linienintegral der *irreversiblen internen* Budgetrate entlang einer Weltlinie definiert und ist damit konzeptionell und empirisch von der

geometrischen Eigenzeit τ_{geo} trennbar. Diese Trennung ist entscheidend, weil nur A die irreversible Komponente erfasst, während τ_{geo} auch in reversiblen Regimen akkumuliert.

VIII.1.3 Scope und Abgrenzung

Wir arbeiten *flach* (kein Krümmungsterm) und *kinematisch* (keine Backreaction). Dynamiken sind GKLS–konform beziehungsweise zeitlokal CP–divisibel; nichtmarkovsche Erweiterungen dienen nur als Vergleich und werden nicht als Monotonie-Quelle verwendet. Lokalität/No–Signalling werden als Zulässigkeitsbedingungen über die in den FBA - Grundlagen eingeführte Kompositionsstruktur und die dort fixierten „Keine Budgetinflation durch Umverdrahtung“-Schranken implementiert (keine zusätzliche Dynamikannahme in diesem Teil, sondern Teil des Zulässigkeitsrahmens).[5] Fragen der Gravitation aus Budgetflüssen, der Skalen/Renormierung und der kosmischen Dynamik werden in den Teilen VI, VII und IX vertieft.[6] [7] [8]

VIII.1.4 Beitrag gegenüber Standardansätzen

Anstatt (i) den klassischen Limes über ad-hoc-„klassische“ Postulate einzuführen oder (ii) den zweiten Hauptsatz heuristisch zu begründen, stellen wir die Ableitung so auf, dass die wesentlichen Aussagen *aus* CPTP/GKLS, DPI/Spohn und dem Budgetkalkül folgen, wobei die jeweils benötigten Zusatzannahmen (Pointer-Stabilität, Markov-Schließung, detailed balance bzw. Mikroreversibilität, Randbedingungen) explizit benannt werden. Pointer–Strukturen und Fokker–Planck–Koeffizienten erscheinen als operativ stabilste Modi zulässiger Vergröberung, und Landauer/Crooks/Jarzynski werden zu präzisen, kalibrierten Budget–Statements. Neu ist außerdem die beobachtbare Größe *Altern* als (zeitartig kalibrierte) Akkumulation irreversibler *interner* Nutzung, die konzeptionell von Eigenzeit und kinematischer Zeitdilatation getrennt bleibt.

VIII.1.5 Lesefaden

Teil VIII ist modular: Wer nur die Entscheidlogik (Pass/Fail) und die experimentellen Anker sucht, kann mit der Checkliste starten und dann gezielt zu den benötigten Ableitungen zurückspringen.

Empfohlene Kurzpfade sind:

(i) *Klassischer Limes* $Kapitel\ VIII.3 \to Kapitel\ VIII.4 \to Kapitel\ VIII.5$,

(ii) *Thermodynamik/Transport* $Kapitel\ VIII.6 \to Kapitel\ VIII.7 \to Kapitel\ VIII.9$,

(iii) *Altern* $Kapitel\ VIII.8$ (mit Rückbezug auf Kapitel VIII.6).

Der lineare Lesegang (Kapitel für Kapitel) ist:

- **Kapitel VIII.2 - Vorangestellte Grundlagen & Konventionen:** Import der benötigten Bausteine und Konventionen aus den FBA - Grundlagen (Notation, Einheiten,

[5] Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kompositionsstruktur; Lemma „Keine Budgetinflation durch Umverdrahtung“.

[6] Siehe FBA Teil VI: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen, Einleitung und Überblick.

[7] Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Einleitung und Überblick.

[8] Siehe FBA Teil IX: Kosmische Dynamik, Time Dilation & Inflation (TDI), Einleitung und Überblick.

Front-/Kalibrationssprache), damit die folgenden Ableitungen ohne stille Bedeutungswechsel auskommen.[9]

- **Kapitel VIII.3 - Dekohärenz, Pointer–Projektion & klassischer Limes:** Dekohärenz als Coarse-Graining-Mechanismus; Pointer–Projektion als operative Klassikalisierung und Ableitung einer effektiven Mastergleichung als erster „klassischer Proxy" für spätere Thermodynamik- und Transportaussagen.
- **Kapitel VIII.4 - Master → Fokker–Planck → Langevin:** Diffusiver Skalenübergang (Kramers–Moyal/Fokker–Planck/Langevin) inklusive klar benannter Regularitäts- und Trunkationsannahmen; liefert die Standardform für Raten, Drift und Rauschterme im klassischen Regime.
- **Kapitel VIII.5 - Ehrenfest-/Hamilton–Limes & effektive Trajektorien:** Deterministischer Grenzfall (Ehrenfest/Hamilton) als weitere Reduktion derselben Coarse-Graining-Struktur; erklärt, wann „Trajektorien" als effektive Beschreibung zulässig sind und wo sie scheitern.
- **Kapitel VIII.6 - Thermodynamik I: Entropieproduktion, DPI/Spohn & zweiter Hauptsatz:** Herleitung von Entropieproduktion und zweitem Hauptsatz aus DPI/Spohn und budgetkalibrierter Bilanz (mit expliziten Zusatzannahmen zu Stationarität/Referenzen).
- **Kapitel VIII.7 - Thermodynamik II: Fluktuationssätze (Crooks/Jarzynski) im FBA:** Fluktuationsrelationen als feinere Tests derselben Bilanz- und Monotoniestruktur; macht klar, welche Annahmen (z. B. Zeitumkehr-/Detailed-Balance-Nähe, Protokollkontrolle) nötig sind.
- **Kapitel VIII.8 - Altern im FBA: Definition, Metrik & Beobachtbarkeit:** Altern als kalibrierter irreversibler interner Linienfluss (Abgrenzung zur geometrischen Eigenzeit); gibt messbare Metriken/Surrogate und zeigt, welche Observablen das Altern überhaupt identifizieren.
- **Kapitel VIII.9 - Nichtgleichgewicht & Transport: FDT, Green–Kubo & Budgetflüsse:** Anschlusskapitel für Nichtgleichgewicht: FDT und Green–Kubo als Konsistenz- und Rekonstruktionswerkzeuge, die direkt an die in Thermodynamik I/II eingeführten Produktions- und Bilanzgrößen andocken.
- **Kapitel VIII.10 - Vergleich & Einordnung zum Standard:** Übersetzung in Standard-QM/StatPhys-Sprache und Herausarbeiten dessen, was im FBA als *Proxy-/Regime-Test* neu hinzukommt (statt nur „alternative Gleichungen" zu behaupten).
- **Kapitel VIII.11 - Zusammenfassung & Checkliste (Pass/Fail):** Kompakter Abschluss: Entscheidungsgerüst, typische Failure-Modes und eine schnelle Smoke-Test-Checkliste, die sich direkt als Anhang zu Datensätzen/Simulationen verwenden lässt.

[9] Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Notation, Einheiten, Front-/Kalibrationssprache.

VIII.2 Vorangestellte Grundlagen & Konventionen (Import aus Teil I: FBA-Grundlagen)

Dieses Kapitel schafft einen stabilen Ausgangspunkt: Für den klassischen Limes und thermodynamische Aussagen ist entscheidend, dass wir (i) zulässige Mikrodynamik (CPTP/GKLS), (ii) Budgetbilanzen und (iii) die daraus folgenden Monotonien nicht stillschweigend variieren. Deshalb importieren wir die benötigten Bausteine unverändert und ergänzen lediglich die Notation dort, wo wir später klassische Generatoren, Drift-/Diffusionskoeffizienten und Entropieflüsse präzise formulieren.[10]

Importierte Bausteine (unverändert)

Wir übernehmen die folgenden Bausteine *ohne* Neudefinition aus Teil I: FBA - Grundlagen.

- **Abfolge globaler Zustände & Minimalereignisse:** Teil I, Kap. I.2 „Globale Zustände, Frame-Folge und Minimalereignis (ME)“; Teil I, Kap./Box I.2 „Koaktualität und Refinement-Invarianz“.
- **Differenzfunktion & operative Minimaldifferenz:** Teil I, Box I.2 „Differenzfunktion & operative Minimaldifferenz“.
- **Budget-Kalkül (intern/extern/irreversibel) & Bilanz:** Teil I, Kap./Box I.3 „Ein-Schritt-Budget & Zerlegung“; Teil I, Formelkasten I.3 „Bilanzgleichungen“; Teil I, Lemma I.3 „Refinement-Invarianz der Bilanz“.
- **Externe Kalibration & Front:** Teil I, Definition I.3 „Kalibration und Frontkosten“; Teil I, Lemma I.3 „Frontschranke“; Teil I, Korollar I.3 „Signalfront“.
- **Eigenzeit & Altern, Minkowski-Limes:** Teil I, Definition I.4 „Eigenzeit (proper time)“; Teil I, Formelkasten I.4 „Eigenschaften der Eigenzeit“; Teil I, Definition I.4 „Alterung (irreversibel)“; Teil I, Formelkasten I.4 „Minkowski-Limes & Quadrik“; Teil I, Lemma I.4 „Zeitdilatation“.
- **Zulässige Dynamik (CPTP/GKLS), DPI/Spohn:** Teil I, Definition I.5 „Admissible Channels (CPTP)“; Teil I, Formel I.5 „Kraus/Stinespring“; Teil I, Lemma I.5 „Messung als CPTP“; Teil I, Definition I.5 „GKLS-Generatoren (offene Systeme)“; Teil I, Formel I.5 „Spohn-Monotonie“; Teil I, Lemma I.5 „Semigroup–Budget“; Teil I, Definition/Korollar I.5 „DPI-Pfeil & No-Recovery“.
- **Komposition, Lokalität & No-Signalling:** Teil I, Definition I.6 „Symmetrisch-monoidale Struktur“; Teil I, Formel I.6 „Budget-Additivität“; Teil I, Lemma I.6 „No-Wire-Inflation & lokale Operationen“; Teil I, Korollar I.6 „Kausalkegel & lokale GKLS“.

Damit ist festgelegt, was im weiteren Verlauf als bereits operativ fixiert gilt. Was nun noch fehlt, ist eine konsistente Sprachschicht für den Übergang zu effektiven klassischen Zuständen und für die thermodynamischen Größen, die wir später aus DPI/Spohn und Budgetflüssen ableiten. Um die Importfunktion dieses Kapitels nicht zu überfrachten, bündeln wir die Konventionen in zwei kompakten Notationsboxen (Budget/Thermo vs. Stochastik/GKLS).

[10] Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kap. I.2–I.6 (importierte Bausteine).

Notation & Konventionen I: Budget, Zeit, Thermo

- **Diskret vs. Kontinuum:** Schrittindex $n \in \mathbb{Z}$; $\delta(\cdot)$ für Ein-Schritt-Inkremente, $d(\cdot)$ für differentielle Größen; $\sum \delta(\cdot)$ vs. $\int d(\cdot)$.
- **Budget-Zerlegung & Zeitkalibration:** $\delta b_{\text{int}} = \delta b_{\text{int}}^{\text{rev}} + \delta b_{\text{irr}}$ mit $\delta b_{\text{irr}} \geq 0$ (analog im Kontinuum). Mit κ_τ (und $\alpha_\tau := \kappa_\tau^{-1}$):

$$d\tau_{\text{geo}} = \frac{db_{\text{int}}^{\text{rev}}}{\kappa_\tau}, \quad dA = \frac{db_{\text{irr}}}{\kappa_\tau} \geq 0, \quad d\tau_{\text{tot}} = \frac{db_{\text{int}}}{\kappa_\tau} = d\tau_{\text{geo}} + dA.$$

- **Einheiten/Kalibration:** c ist die Kalibrationskonstante der schnellsten zulässigen Fronten (metrologisch fixiert); c und k_B bleiben explizit (keine c=1, k_B=1).
- **Thermo-Konventionen:** $Q > 0$ ins System, $W > 0$ Arbeit am System, $\beta = (k_B T)^{-1}$. Für ein Bad bei β: $dS_{\text{env}} = -\beta\, \delta Q$. (Hier ist δQ thermodynamische Notation für ein *inexaktes* Differential und nicht mit $\delta(\cdot)$ zu verwechseln.)

Notation & Konventionen II: GKLS, Reduktion, Stochastik

- **GKLS & Referenzen:** $\dot{\rho} = \mathcal{L}_t(\rho)$. Gemeinsame Referenz: $\mathcal{L}_t(\rho^\star) = 0\ \forall t$. Instantane Referenz: $\mathcal{L}_t(\rho_t^\star) = 0$ (Monotonien relativ zu $\rho_t^\star$ nur mit explizit kontrollierten Zusatztermen). Standardmäßig endlichdimensional; im unendlichdimensionalen Fall sind Domänen/Stetigkeit/Smearing explizit zu ergänzen.
- **Coarse–Graining:** CPTP-Reduktion $\mathcal{R} : \rho \mapsto p$; effektiver klassischer Generator K_t für p_t.
- **Fokker–Planck/Langevin (Itô):** $\partial_t p = -\partial_i(a_i p) + \partial_i \partial_j (D_{ij} p)$ mit $D \succeq 0$, äquivalent als $dx = a\, dt + B\, dW_t$ mit $2D = BB^\top$ (Details im jeweiligen Kapitel).
- **Minimal-Symbolik:** $\|\cdot\|$, $\mathbb{E}[\cdot]$, ln.

VIII.3 Dekohärenz, Pointer–Projektion & klassischer Limes

Der klassische Limes entsteht im FBA nicht durch zusätzliche Postulate, sondern als robuste Effektivbeschreibung, wenn geeignete *Pointer–Sektoren* die relevanten Freiheitsgrade bündeln und Off–Diagonalen auf einer kurzen Zeitskala relaxieren.[1, 2] In diesem Kapitel präzisieren wir zunächst die Reduktion $\rho \mapsto p$, formulieren anschließend die zugehörigen Kontraktionen/-Monotonien (DPI/Spohn)[3–5] *unter* dieser Reduktion und geben schließlich hinreichende Bedingungen an, unter denen eine (näherungsweise) geschlossene Master–Gleichung für p_t resultiert.[6–8] [11] [12]

VIII.3.1 Primitive, Definitionen & Reduktionsabbildungen

Zuerst fixieren wir, was unter einer *pointerstabilen* Zerlegung zu verstehen ist und wie klassische Variablen operativ aus ρ extrahiert werden. Entscheidend ist dabei: Die Wahl der Sektoren ist keine bloße Konvention, sondern wird an der tatsächlichen (GKLS-)Dynamik gemessen.[6–8] Nur dann ist „klassisch“ gleichbedeutend mit „unter zulässiger Dynamik stabil“.[1, 2]

Definition VIII.3.1.1: Pointer–Familie & pointerstabile Projektion

Eine endliche oder abzählbare Projektor–Familie $\{\Pi_x\}_{x\in\mathcal{X}}$ heißt *Pointer–Familie*, wenn

1. **Projektive Auflösung:**

$$\Pi_x\Pi_y = \delta_{xy}\Pi_x, \qquad \sum_{x\in\mathcal{X}} \Pi_x = \mathbb{I}.$$

   (Falls $\mathcal{X}$ abzählbar unendlich ist, sei die Summe im üblichen Sinn der Operatoralgebra zu verstehen, z. B. als starke Grenzwertbildung.)

2. **Dekohärenzstabilität:** Die GKLS–Dynamik $\dot\rho = \mathcal{L}(\rho)$ dämpft die Off–Diagonalen $\Pi_x\rho\,\Pi_y$ für $x \neq y$ auf einer Zeitskala τ_{dec} exponentiell,[1, 2, 8] d. h. es existieren Konstanten $C_{\mathrm{dec}}, \gamma_{\mathrm{dec}} > 0$ mit (für eine geeignete, dynamikkompatible Norm $\|\cdot\|$)

$$\|\Pi_x\rho_t\Pi_y\| \;\le\; C_{\mathrm{dec}}\, e^{-\gamma_{\mathrm{dec}}t}\, \|\Pi_x\rho_0\Pi_y\|, \qquad (x\neq y), \quad \tau_{\mathrm{dec}} \sim \gamma_{\mathrm{dec}}^{-1}.$$

Mit einer pointerstabilen Familie ist „klassisch“ zunächst ein *Informationsbegriff*: Wir behalten die Populationsanteile in den Sektoren und verwerfen kohärente Querterme. Damit diese Reduktion nicht nur eine Momentaufnahme ist, fixieren wir zusätzlich eine kanonische Rückeinbettung, so dass Schließungsfehler explizit sichtbar werden.

[11] Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.4–IV.6 (Dekohärenzmechanismen, Messinstrumente).

[12] Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Kap. III.3–III.5 (CPTP, Kanäle, Strukturen).

Definition VIII.3.1.2: Coarse–Graining $\mathcal{R}$ und klassische Einbettung ι

Wir identifizieren den klassischen Zustandsraum mit einem kommutativen „Register“ X mit Basis $\{|x\rangle\}_{x\in\mathcal{X}}$. Das *Coarse–Graining* ist der Quantum–to–Classical–Kanal[9, 10]

$$\mathcal{R}(\rho) \;:=\; \sum_{x\in\mathcal{X}} \operatorname{tr}(\Pi_x\rho)\,|x\rangle\langle x|, \qquad \text{d. h.} \qquad p_x := \operatorname{tr}(\Pi_x\rho).$$

Eine kanonische *Einbettung* ι hebt p in den blockdiagonalen Teil des Zustandsraums an, z. B.

$$\iota(p) \;:=\; \sum_x p_x\,\sigma_x,$$

mit fest gewählten Repräsentanten σ_x auf den Trägern Π_x ($\sigma_x \geq 0$, $\operatorname{tr}\sigma_x = 1$, $\Pi_x\sigma_x\Pi_x = \sigma_x$). Dann gilt $\mathcal{R}\circ\iota = \mathrm{id}$ auf dem klassischen Simplex (als Zustände auf X).

Die zentrale technische Frage ist nun: Wann ist die reduzierte Beschreibung dynamisch geschlossen? Genau dafür brauchen wir eine präzise Formulierung, die (i) Zeitskalen–Separation und (ii) einen kontrollierten Schließungsfehler trennt.

Definition VIII.3.1.3: Sektorschließung & Zeitskalen–Separation

Wir sagen, $\{\Pi_x\}$ erfülle *Sektorschließung*, wenn es einen (ggf. zeitabhängigen) klassischen Generator K_t (Rate–Matrix) gibt, so dass für alle zulässigen p

$$\mathcal{R}\big(\mathcal{L}_t(\iota(p))\big) = K_t\,p + \mathcal{O}(\varepsilon),$$

wobei $\varepsilon \ll 1$ einen kleinen Schließungsfehler (z. B. jenseits einer Säkularapproximation) bezeichnet. Zusätzlich gelte $\tau_{\mathrm{dec}} \ll \tau_{\mathrm{obs}}$ (*Zeitskalen–Separation*), so dass Off–Diagonalen auf Beobachtungsskalen vernachlässigbar sind. Im geschlossenen Limes ist $\varepsilon \to 0$ zu verstehen.

Damit ist klar, was „klassischer Limes“ hier konkret bedeutet: Nicht „ρ wird klassisch“, sondern „die projizierten Größen p bilden auf den relevanten Skalen ein autonomes, stochastisches System“. Um K_t zu identifizieren, ist es hilfreich, Sprungraten direkt aus einer Lindblad–Zerlegung abzulesen.[6–8]

Formelkasten VIII.3.1.1: GKLS–Generator und Populationsraten

Schreibe (zeitabhängig, falls getrieben)[6, 7]

$$\mathcal{L}_t(\rho) = -i[H_t, \rho] + \sum_\alpha \Big(L_{\alpha,t}\rho L_{\alpha,t}^\dagger - \tfrac{1}{2}\{L_{\alpha,t}^\dagger L_{\alpha,t}, \rho\} \Big).$$

Wir verstehen p als Spaltenvektor und $\dot{p} = K_t p$. Für $y \neq x$ definieren die Sprungraten

$$K_{yx}(t) \;:=\; \sum_\alpha \operatorname{tr}\Big[\Pi_y \, L_{\alpha,t}\, \sigma_x \, L_{\alpha,t}^\dagger\Big], \qquad K_{xx}(t) := -\sum_{y\neq x} K_{yx}(t).$$

Dann ist K_t spaltenstochastisch ($\sum_y K_{yx} = 0$) und $K_{yx}(t) \geq 0$ für $y \neq x$.[8]

Hamilton-Anteil (Scope). Der Term $-i[H_t, \rho]$ trägt zur Populationsbilanz nur dann nicht bei, wenn H_t die Sektoren nicht mischt (z. B. $[H_t, \Pi_x] = 0$ oder sektormischende Terme sind im Säkularlimes gegenüber $\tau_{\mathrm{dec}} \ll \tau_{\mathrm{obs}}$ effektiv ausgemittelt).[8] In diesem Fall erzeugt H_t primär Phasen bzw. Drift *innerhalb* der Sektoren.

Diese Identifikation ist nicht bloß Formalismus: Sie macht sichtbar, welche Mikromodi „klassisch“ überleben (die Raten) und welche nur als sektorinterne Koordinatisierung auftreten (unitäre Phasen/Drift). Für Details zur GKLS–Normalform und zur CPTP–Struktur genügt hier der Verweis auf die Grundlagen.[13] [14]

VIII.3.2 DPI/Spohn–Monotonie unter Projektion

Reduktion ist nur dann physikalisch brauchbar, wenn sie die grundlegenden Kontraktionen zulässiger Dynamik nicht verletzt. Intuitiv: Coarse–Graining darf Unterscheidbarkeit nicht erhöhen. Genau daraus entsteht das klassische H-Theorem als „Schatten“ der zugrundeliegenden Monotonien.[3–5]

Lemma VIII.3.2.1: Klassisches H-Theorem im projizierten Markov–Fluss

Sei $p_t := \mathcal{R}(\rho_t)$ und gelte Sektorschließung im Sinne von Definition VIII.3.1.3, d. h. $\dot{p}_t = K_t p_t + \mathcal{O}(\varepsilon)$. Sei $p^\star$ ein positives Referenzmaß, das *gemeinsam* stationär ist, d. h. $K_t p^\star = 0$ für alle t. Dann gilt (für endliche $\mathcal{X}$, bzw. im abzählbaren Fall bei endlicher Divergenz) im geschlossenen Limes ($\varepsilon \to 0$)

$$\frac{d}{dt}\, D(p_t \| p^\star) \;\leq\; 0.$$

Zusätzlich gilt punktweise (DPI der Projektion)[3, 4]

$$D(p_t \| p^\star) \;=\; D(\mathcal{R}(\rho_t) \| \mathcal{R}(\rho^\star)) \;\leq\; D(\rho_t \| \rho^\star)$$

für jedes $\rho^\star$ mit $\mathcal{R}(\rho^\star) = p^\star$.

[13] Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kap. I.5 (Kraus/Stinespring, GKLS).
[14] Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.2.

Beweisskizze VIII.3.2.1: Klassisches H-Theorem im projizierten Markov–Fluss

(1) Klassische Markov-Kontraktion. Für $\dot{p} = K_t p$ und ein gemeinsames stationäres $p^\star$ ist die klassische relative Entropie $D(p_t \| p^\star)$ eine Lyapunov-Funktion; die Zeitableitung lässt sich als Summe nichtnegativer Beiträge (Log-Sum-/Konvexitätsargument) schreiben, also $\frac{d}{dt} D(p_t \| p^\star) \le 0$. Bei $\dot{p} = K_t p + \mathcal{O}(\varepsilon)$ gilt entsprechend $\frac{d}{dt} D(p_t \| p^\star) \le \mathcal{O}(\varepsilon)$. (Falls statt eines gemeinsamen $p^\star$ nur ein instantanes $p_t^\star$ vorliegt, entstehen die bekannten Zusatzterme; diese werden im Thermodynamikteil nur dort benutzt, wo sie explizit kontrolliert sind.)

(2) DPI der Projektion. Da $\mathcal{R}$ CPTP ist, gilt für alle Zustände ρ, σ: $D(\mathcal{R}(\rho) \| \mathcal{R}(\sigma)) \le D(\rho \| \sigma)$.[3, 4] Setzt man $\sigma = \rho^\star$ mit $\mathcal{R}(\rho^\star) = p^\star$, erhält man die punktweise Schranke.

(3) Bezug zu Spohn (Konsistenz). Falls $\rho^\star$ ein *gemeinsamer* GKLS-Referenzzustand ist ($\mathcal{L}_t(\rho^\star) = 0 \ \forall t$), liefert Spohn zusätzlich $\frac{d}{dt} D(\rho_t \| \rho^\star) \le 0$.[5] Die Projektion erzeugt damit keinen „künstlichen Pfeil“, sondern überträgt Kontraktion in das klassische Bild.

Damit ist die thermodynamisch relevante Aussage vorbereitet: Unter zulässiger Projektion wird Irreversibilität nicht „hineinprojiziert“, sondern bleibt als Kontraktion sichtbar. Zusammen mit der Sektorschließung folgt die (näherungsweise) autonome Master–Dynamik für p_t inklusive Lyapunov-Struktur.

Korollar VIII.3.2.1: Klassische Master–Dynamik & Kontraktion

Unter Sektorschließung (Definition VIII.3.1.3) gilt für p_t eine (zeitlokale) Master–Gleichung

$$\dot{p}_t = K_t \, p_t + \mathcal{O}(\varepsilon), \qquad \sum_y K_{yx}(t) = 0, \quad K_{yx}(t) \ge 0 \ (y \ne x),$$

und im geschlossenen Limes ist $D(p_t \| p^\star)$ eine Lyapunov–Funktion, sofern $p^\star$ ein gemeinsames stationäres Referenzmaß ist:

$$\frac{d}{dt} D(p_t \| p^\star) \le 0 \qquad (\text{bzw. } \le \mathcal{O}(\varepsilon) \text{ bei endlichem Schließungsfehler}).$$

Die zugrunde liegenden Monotonien (Spohn/DPI) sind in den Grundlagen fixiert; hier benutzen wir sie nur in projizierter Form.[15]

VIII.3.3 Markov–Schließung: hinreichende Bedingungen

Eine Master–Gleichung ist nur so gut wie ihre Schließungsannahmen. Wir nennen deshalb ein hinreichendes, in Anwendungen häufig erfülltes Strukturkriterium, das die Ableitung von $\dot{p} = Kp$ kontrolliert rechtfertigt.[8]

[15] Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kap. I.5 (Spohn–Monotonie, DPI–Pfeil & No–Recovery).

Lemma VIII.3.3.1: Blockstruktur & Säkularlimes ⇒ Markov–Schließung

Seien die Lindblad–Operatoren $L_{\alpha,t}$ *sprungselektiv* bezüglich $\{\Pi_x\}$, d. h.

$$L_{\alpha,t} = \sum_{x\to y} \Pi_y L_{\alpha,t} \Pi_x,$$

und seien sektormischende kohärente Terme entweder abwesend ($\Pi_y H_t \Pi_x = 0$ für $y \neq x$) oder im Säkularlimes gegenüber $\tau_{\text{dec}} \ll \tau_{\text{obs}}$ effektiv ausgemittelt.[8] Sei außerdem σ_x in jedem Block stationär für die sektorinterne Hamilton–Dynamik ($\Pi_x[H_t, \sigma_x]\Pi_x = 0$). Dann schließen die Populationsgleichungen zu $\dot{p} = K_t p$ mit K_t aus Formelkasten VIII.3.1.1 (bis auf $\mathcal{O}(\varepsilon)$).

Beweisskizze VIII.3.3.1: Blockstruktur & Säkularlimes ⇒ Markov–Schließung

Setze $\rho = \iota(p) + \delta\rho_{\text{off}}$. Die dissipativen Terme liefern (für $y \neq x$) genau die Übergänge

$$\dot{p}_y = \sum_{x,\alpha} \operatorname{tr}\left[\Pi_y L_{\alpha,t} \sigma_x L_{\alpha,t}^{\dagger}\right] p_x + \mathcal{O}(\|\delta\rho_{\text{off}}\|).$$

Säkularlimes und $\tau_{\text{dec}} \ll \tau_{\text{obs}}$ unterdrücken $\delta\rho_{\text{off}}$.[8] Der Hamilton-Anteil trägt bei blockdiagonalem (oder effektiv ausgemitteltem) H_t nicht zur Populationsbilanz bei; innerhalb der Blöcke bleibt er spurerhaltend. Positivität und Spaltensummen folgen aus der GKLS–Struktur.

Neben der Schließung ist stationäres Verhalten entscheidend, weil es die Referenz $p^\star$ für Kontraktionen fixiert. Detailed balance ist dabei nicht nötig, liefert aber ein besonders transparentes Konvergenzbild.

Korollar VIII.3.3.1: Stationärmaß & detailed balance (hinreichend)

Sei $\rho^\star$ ein stationärer GKLS-Zustand ($\mathcal{L}(\rho^\star) = 0$) und sei er kompatibel mit der Einbettung, d. h. $\rho^\star$ ist blockdiagonal in $\{\Pi_x\}$ und lässt sich als $\rho^\star = \sum_x p_x^\star \sigma_x^\star$ schreiben (z. B. mit $\sigma_x^\star \propto \Pi_x \rho^\star \Pi_x$). Dann ist $p^\star := \mathcal{R}(\rho^\star)$ stationär für den projizierten Generator K (im geschlossenen Limes).

Gilt zudem für alle $x \neq y$ (in einer passenden Darstellung) die detailed-balance Symmetrie

$$K_{yx}\, p_x^\star = K_{xy}\, p_y^\star,$$

so liegt *detailed balance* vor. Ist der projizierte Prozess zudem ergodisch (z. B. irreduzibel auf dem relevanten Zustandsraum), fällt $D(p_t \| p^\star)$ strikt bis auf das Invarianten–Untermodul.

Für die Einordnung stationärer Zustände und die Rolle von detailed balance im GKLS–Rahmen verweisen wir auf die entsprechende Ausarbeitung.[16]

[16] Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.7.

VIII.3.4 Bemerkungen zur Messung & Konsistenz

Die Reduktion $\mathcal{R}$ ist *kein* zusätzliches Messpostulat, deckt sich aber mit Born–Wahrscheinlichkeiten, sofern die POVM–Elemente die Pointer–Projektionen sind.[9–11] Wichtig ist die Trennung zwischen unselektierter (kontraktiver) Dynamik und selektiven, instrumentierten Updates.[9, 12]

Born–Konsistenz & Instrumente

Für eine POVM $\{M_x\}$ mit $M_x = \Pi_x$ fällt $\mathcal{R}$ mit der Born–Wahrscheinlichkeit $p_x = \mathrm{tr}(M_x\rho)$ zusammen.[11] Selektive Messungen entsprechen instrumentierten CPTP–Schritten,[9, 12] die *außerhalb* der unselektierten GKLS–Flüsse liegen; Lemma VIII.3.2.1 und Korollar VIII.3.2.1 beziehen sich stets auf unselektierte Dynamik.

Der Punkt ist operativ: Monotonien (DPI/Spohn) sind Aussagen über zulässige, unselektierte Verarbeitung. Selektive Updates können Unterscheidbarkeit scheinbar „erhöhen“, weil sie Konditionierung einführen – genau deshalb behandeln wir sie hier nicht als Thermodynamiktreiber, sondern als Protokollbestandteil (Instrument).

VIII.3.5 Einordnung & Ausblick

Wir haben damit eine kontrollierte Route $\rho_t \xrightarrow{\mathcal{R}} p_t$ etabliert, inklusive Schließungsbegriff, Markov–Generator und H-Theorem im projizierten Bild. In Kapitel VIII.4 führen wir diese Master–Dynamik in den kontinuierlichen Skalenlimes (Kramers–Moyal/Fokker–Planck/Langevin). In Kapitel VIII.5 nutzen wir den reversiblen Anteil für den Ehrenfest- bzw. Hamilton–Limes. Zum Minkowski-Limes (Quadrik/Lorentz-Struktur) als kinematischem Rahmen siehe Teil II.[17] Diese beiden Schritte bilden anschließend die Basis für die thermodynamische Analyse in Kapitel VIII.6 und VIII.7.

[17] Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Kap. II.6 „Budget-Quadrik und Minkowski-Limes“ sowie Kap. II.7 „Relativität & Lorentz-Symmetrien aus der Quadrik“.

VIII.4 Master → Fokker–Planck → Langevin

Auf der Ebene diskreter Sektoren liefert Korollar VIII.3.2.1 eine Master–Gleichung. Für *stetige* Pointer–Variablen (Positionen, kollektive Koordinaten) ist diese Beschreibung jedoch zu grob: Viele kleine, schnelle Sprünge überlagern sich so, dass im geeigneten Skalenlimes eine glatte Konvektions–Diffusionsdynamik entsteht.[13–15] Genau dieser Übergang ist entscheidend, weil erst er die Brücke zur Standard–Statistikphysik schlägt und die späteren thermodynamischen Monotonien als Aussagen über Ströme, Potentiale und Diffusion lesbar macht.

Wir beginnen daher mit der Reskalierung, lesen Drift und Diffusion direkt aus den Sprungraten ab, sichern Positivität im Limit und geben anschließend die äquivalente Langevin–Trajektorienform.[13, 14] Skalen- und Einheitenfragen (insbesondere $\beta = (k_B T)^{-1}$) sind dabei reine Kalibrationsfragen und werden systematisch gebündelt.[18]

VIII.4.1 Skalenannahmen & Reskalierung

Der diffusive Limes ist eine kontrollierte Aussage darüber, *welche* mikroskopischen Details beim Vergröbern verschwinden und *welche* als effektive Koeffizienten übrig bleiben.[13, 15] Wir fixieren deshalb explizit die Gitterauflösung und (äquivalent) die Skalierung der Raten, damit Drift und Diffusion später als eindeutig aus den Raten rekonstruierbare Größen erscheinen.

Definition VIII.4.1.1: Diffusionslimes & Reskalierung

Sei $\mathcal{X}_h \subset \mathbb{R}^d$ ein Gitter mit Maschenweite $h > 0$ und Zuständen $x \in \mathcal{X}_h$. Für jedes h sei $p^{(h)}(\cdot, t)$ durch eine Master–Gleichung $\dot{p}^{(h)} = K_t^{(h)}\, p^{(h)}$ gegeben.

1. **Kleine Sprünge:** Zulässige Sprünge $\delta := y - x$ erfüllen $\|\delta\| = \mathcal{O}(h)$.
2. **Diffusive Skalierung (äquivalent als Raten-Skalierung):** Wir betrachten die makroskopische Zeit t, in der die effektive Bewegung nichttrivial bleibt. Äquivalent kann man eine mikroskopische Zeit s einführen und $t = h^{-2}s$ setzen; dann sind die relevanten Raten typischerweise von Ordnung h^{-2}, sodass die ersten beiden (reskalierten) Sprungmomente endlich sind.[13, 15]
3. **Dichte vs. Gitterwahrscheinlichkeit:** $p^{(h)}(\cdot, t)$ ist eine Wahrscheinlichkeits*masse* auf $\mathcal{X}_h$. Eine zugehörige Dichte $p(x, t)$ auf $\mathbb{R}^d$ ist so zu verstehen, dass für geeignete Testfunktionen φ

$$\sum_{x \in \mathcal{X}_h} \varphi(x)\, p^{(h)}(x, t) \;\longrightarrow\; \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(x)\, p(x, t)\, dx \qquad (h \to 0),$$

   d. h. informell $p^{(h)}(x, t) \approx p(x, t)\, h^d$ im glatten Regime.
4. **Momenten-Limes:** Die reskalierten ersten beiden Kramers–Moyal–Koeffizienten aus Formelkasten VIII.4.1.1 besitzen im Limes $h \to 0$ endliche Grenzwerte $a_i(x, t)$ und $D_{ij}(x, t)$.

Unter dieser Skalierung überleben im Grenzübergang genau die ersten beiden Momente der Sprungverteilung.[13, 15] Damit wird das effektive Modell nicht geraten, sondern aus der

[18] Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Kap. VII.1–VII.2 „Kalibration & thermische Skalen“.

Mikrodynamik gelesen.

Formelkasten VIII.4.1.1: Kramers–Moyal–Koeffizienten aus Sprungraten

Für ein Gitter $x \in \mathcal{X}_h$ und zulässige Sprünge δ definiere (für jedes h)

$$a_i^{(h)}(x,t) \;:=\; \sum_{\delta} \delta_i \, K^{(h)}_{x+\delta,\,x}(t), \qquad D_{ij}^{(h)}(x,t) \;:=\; \tfrac{1}{2}\sum_{\delta} \delta_i \, \delta_j \, K^{(h)}_{x+\delta,\,x}(t),$$

wobei die Summen über alle zulässigen δ laufen (mit $\|\delta\| = \mathcal{O}(h)$). Im diffusen Limes existieren Grenzwerte $a_i = \lim_{h\to 0} a_i^{(h)}$, $D_{ij} = \lim_{h\to 0} D_{ij}^{(h)}$ (in passendem Sinn), und $D(x,t) = [D_{ij}(x,t)]$ ist symmetrisch.

VIII.4.2 Fokker–Planck–Gleichung & Positivität

Die zentrale Konsistenzforderung ist Positivität: Die effektive Gleichung darf keine negativen Wahrscheinlichkeiten erzeugen.[13, 15] Im FBA ist das kein Zusatzpostulat, sondern wird vom Ursprung der Dynamik her abgesichert: Sprungraten stammen aus GKLS und sind daher nichtnegativ; im diffusen Grenzfall wird daraus eine positiv semidefinite Diffusionsmatrix.

Lemma VIII.4.2.1: Pawula–Typ: Diffusionslimes liefert Fokker–Planck mit $D \succeq 0$

Unter Definition VIII.4.1.1 und endlichen zweiten Momenten der Sprünge (sowie dem Verschwinden der höhergeordneten reskalierten Kramers–Moyal–Terme im diffusen Limes) ist der Grenzoperator durch die Koeffizienten a_i und D_{ij} aus Formelkasten VIII.4.1.1 bestimmt.[13, 15] *Ergebnis:* Die Dichte $p(x,t)$ erfüllt

$$\partial_t p(x,t) \;=\; -\partial_i[a_i(x,t)\,p(x,t)] + \partial_i\partial_j[D_{ij}(x,t)\,p(x,t)],$$

und $D(x,t) = [D_{ij}(x,t)] \succeq 0$. (Well-posedness erfordert zusätzlich die üblichen Regularitäts- und Randannahmen; vgl. Abschnitt VIII.4.3.)

Beweisskizze VIII.4.2.1: Pawula–Typ: Diffusionslimes liefert Fokker–Planck mit $D \succeq 0$

Im diffusen Reskaling tragen Sprünge der Größe $\mathcal{O}(h)$ bei der makroskopischen Zeit $t \sim h^{-2}s$ in einer Taylor-Expansion genau bis zur zweiten Ordnung zu einem endlichen Grenzoperator bei;[13, 15] die Annahme in Definition VIII.4.1.1 sorgt dafür, dass höhere reskalierte Momente im Grenzübergang verschwinden (sonst verbleibt eine nichtlokale bzw. höhergradige Kramers–Moyal–Dynamik).

Positivität folgt aus der Struktur der zweiten Momente: Für jedes $v \in \mathbb{R}^d$ gilt bereits auf Gitterebene

$$v^\top D^{(h)}(x,t)\, v = \tfrac{1}{2} \sum_{\delta} (v \cdot \delta)^2\, K^{(h)}_{x+\delta,x}(t) \;\ge\; 0,$$

da $K^{(h)}_{x+\delta,x}(t) \ge 0$. Der Grenzübergang erhält die Semidefinitheit, also $D \succeq 0$, und damit ist der Grenzoperator vom (lokalen) Markov-Diffusionstyp, der $p \ge 0$ erhält.[13]

Für die thermodynamische Auswertung ist es hilfreich, die Fokker–Planck–Gleichung als Bilanzform zu schreiben: Dann werden irreversible Beiträge als Ströme sichtbar und lassen sich direkt mit Entropieproduktion verknüpfen.[16]

Formelkasten VIII.4.2.1: Kontinuitätsform & Ströme

Die Fokker–Planck–Gleichung ist eine Kontinuitätsgleichung $\partial_t p + \nabla \cdot J = 0$ mit Strom

$$J_i(x,t) \;=\; a_i(x,t)\, p(x,t) - \partial_j \big[D_{ij}(x,t)\, p(x,t) \big].$$

Eine Zerlegung $J = J^{\mathrm{rev}} + J^{\mathrm{irr}}$ wird später so gewählt, dass J^{irr} den dissipativen (budget-irreversiblen) Anteil trägt und J^{rev} die reversiblen Flussanteile beschreibt (vgl. Kapitel VIII.6 und VIII.7).

VIII.4.3 Langevin–Darstellung (Itô/Stratonovich)

Die Kontinuitätsform beschreibt die Ensembleentwicklung. Für viele Anwendungen (Simulation, Pfadgewichte, Fluktuationssätze) ist jedoch die Trajektorienbeschreibung grundlegender.[14] Sie macht sichtbar, welche Zufallskräfte im Limes übrig bleiben und wie sie mit Diffusion gekoppelt sind.

Formelkasten VIII.4.3.1: Äquivalente Langevin–Gleichungen

Sei $B(x,t)$ so gewählt, dass

$$2\,D(x,t) = B(x,t)\,B(x,t)^\top.$$

Dann ist die Itô–SDE

$$dx(t) \;=\; a\big(x(t),t\big)\,dt \;+\; B\big(x(t),t\big)\,dW_t, \qquad \mathbb{E}\big[dW_i(t)\,dW_j(t)\big] = \delta_{ij}\,dt,$$

äquivalent zu Lemma VIII.4.2.1.[13, 14]

Itô vs. Stratonovich. Schreibt man dieselbe SDE in Stratonovich-Form, so verschiebt sich die Drift um den üblichen Korrekturterm:[14]

$$a_i^\circ \;=\; a_i \;-\; \tfrac{1}{2}\sum_{j,k} B_{jk}\,\partial_{x_j} B_{ik}.$$

Nur in Spezialfällen lässt sich diese Korrektur direkt über D ausdrücken (und hängt dann auch von der Wahl einer Wurzel B ab). Beispielsweise gilt in 1D bei $D = \frac{1}{2}B^2$ die Kurzform $a^\circ = a - \frac{1}{2}\,\partial_x D$. Im Allgemeinen ist die Korrektur durch das konkrete Mikrolimit (Zeitordnung/Coarse-Graining) festgelegt.

Welche Interpretation physikalisch gilt, ist damit keine bloße Konventionsfrage: Sie wird durch das Mikrolimit (Zeitordnung und Sammelgrenzen) festgelegt.[19]

Randbedingungen, Mannigfaltigkeiten, multiplikatives Rauschen

Die kontinuierliche Beschreibung braucht zusätzliche Struktur, sobald Ränder, Krümmung oder x-abhängige Diffusion ins Spiel kommen:

1. **Randbedingungen.**
   - *Reflektierend:* $n\cdot J = 0$ (kein Nettofluss durch den Rand).
   - *Absorbierend:* $p = 0$ (Vernichtung am Rand; äquivalent zu einlaufendem Fluss ohne Rückfluss).
2. **Geometrie (Mannigfaltigkeiten).** Auf einer Mannigfaltigkeit wird der Generator kovariant formuliert; in lokalen Karten bleibt die Bilanzform erhalten, aber Divergenz/Volumenelement und die konkrete Realisierung der Diffusion sind geometrieabhängig:
$$\partial_t p + \nabla_i J^i = 0.$$
3. **Multiplikatives Rauschen.** Für x-abhängiges $D(x,t)$ ist die Stochastik-Konvention (Itô vs. Stratonovich) nicht bloß Notation:[14] Sie wird durch das zugrunde liegende Mikrolimit (Zeitordnung/Coarse-Graining) festgelegt.

[19] Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Kap. III.5 „Stochastische Dilationen & Zeitordnung“.

VIII.4.4 Detailed Balance, stationäre Maße & FDT

Die bisherigen Schritte liefern eine effektive Stochastik. Für Thermodynamik braucht man zusätzlich eine Regimeaussage darüber, *wann* diese Stochastik ein Gleichgewicht kennt und *wie* Abweichungen davon dissipieren.[13, 16] Genau hier setzt detailed balance an: Es ist die Bedingung, unter der stationäre Maße eine Potentialform annehmen und lineare Antwort besonders direkt mit Fluktuationen verknüpft ist.

Lemma VIII.4.4.1: Detailed Balance ⇒ Potentialstruktur

Sei $p^\star(x)$ ein positives stationäres Maß der Fokker–Planck–Dynamik, und gelte *detailed balance* im Diffusionssinn, d. h. der stationäre Strom verschwindet:[13]

$$J[p^\star](x) \;=\; a(x)\,p^\star(x) - \partial_j\big(D_{ij}(x)\,p^\star(x)\big) \;\equiv\; 0.$$

Dann kann die Drift (punktweise) als

$$a_i(x) \;=\; \partial_j D_{ij}(x) \;+\; D_{ij}(x)\,\partial_j \ln p^\star(x)$$

geschrieben werden. Insbesondere gilt im isothermen Gleichgewichtsfall $p^\star(x) \propto e^{-\beta\Phi(x)}$ die Gradientenform

$$a_i(x) \;=\; \partial_j D_{ij}(x) \;-\; \beta\,D_{ij}(x)\,\partial_j\Phi(x),$$

und für konstantes D reduziert sich dies zu $a = -D\,\beta\,\nabla\Phi$.

Korollar VIII.4.4.1: Linearer Limes & Fluktuations–Dissipations–Relation (OU)

Linearisiert man um ein stabiles Fixpunktniveau $x^\star$ und nimmt D lokal konstant an,[13, 17]

$$a(x) \approx -\Gamma(x - x^\star), \qquad D \approx \text{const},$$

so ist die stationäre Kovarianz $C := \mathbb{E}[(x-x^\star)(x-x^\star)^\top]$ durch die Lyapunov-Gleichung

$$\Gamma\,C + C\,\Gamma^\top = 2D$$

bestimmt (Ornstein–Uhlenbeck-Prozess). Im thermischen Gleichgewichtsregime mit $p^\star \propto e^{-\beta\Phi}$ und lokaler quadratischer Approximation $\Phi(x) \approx \frac{1}{2}(x-x^\star)^\top H(x-x^\star)$ ergibt sich (unter der üblichen Einstein-/Mobilitätsrelation)[16]

$$C = \beta^{-1}H^{-1}, \qquad \Gamma = \mu H, \qquad D = \beta^{-1}\mu$$

für eine (symmetrische) Mobilität μ.

Diese Struktur ist später der technische Hebel, um Entropieproduktion, Landauer–Bounds und Fluktuationssätze in derselben Sprache auszudrücken.[20]

[20] Siehe FBA Teil X: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA → QM ↔ ART, Kap. X.2 „Linearresponse & Testgrößen“.

VIII.4.5 Beispiel & Check

Das folgende Minimalbeispiel macht den Übergang greifbar:[13, 14] Es zeigt, wie aus einer diskreten, GKLS-kompatiblen Sprungdynamik im Skalenlimes eine kontinuierliche OU–Dynamik entsteht und wie Drift, Diffusion und stationäres Maß zusammenpassen.

Geburt–Tod–Kette ⇒ Ornstein–Uhlenbeck

Eine eindimensionale Kette mit Sprüngen $\delta = \pm h$ und (makroskopisch skalierten) Raten

$$K_{x+h,x} = h^{-2}\Big(D + \tfrac{h}{2}a(x)\Big), \qquad K_{x-h,x} = h^{-2}\Big(D - \tfrac{h}{2}a(x)\Big),$$

ist für jedes feste h genau dann wohldefiniert (Markov), wenn die Raten nichtnegativ sind, d. h. $D \pm \frac{h}{2}a(x) \geq 0$ auf dem betrachteten Zustandsbereich (z. B. für kleines h und beschränktes a).[15] Sie liefert im Limes $h \to 0$ (über Formelkasten VIII.4.1.1) Drift und Diffusion

$$a(x) = \lim_{h\to 0} \sum_{\delta=\pm h} \delta\, K_{x+\delta,x}, \qquad D = \lim_{h\to 0} \tfrac{1}{2} \sum_{\delta=\pm h} \delta^2\, K_{x+\delta,x}.$$

Wählt man $a(x) = -\Gamma(x - x^\star)$ und $D > 0$ konstant, erhält man den OU–Prozess

$$dx = -\Gamma(x - x^\star)\, dt + \sqrt{2D}\, dW_t,$$

mit stationärer Gaußdichte $p^\star \propto \exp\big(-\frac{1}{2}(x - x^\star)^2/C\big)$, wobei C durch $2D = 2\Gamma C$ bestimmt ist (d. h. $C = D/\Gamma$ im skalaren Fall).[13, 17] Im thermischen Gleichgewichtsregime entspricht dies $p^\star \propto e^{-\beta\Phi}$ mit quadratischem Potential Φ und Einstein-Relation $D = \beta^{-1}\mu$.[16]

VIII.4.6 Einordnung

Damit ist die Brücke

$$\dot{p} = Kp \;\longrightarrow\; \partial_t p = \mathcal{L}_{\mathrm{FP}} p \;\longleftrightarrow\; \text{Langevin}$$

explizit gebaut: Drift und Diffusion sind als Grenzobjekte der Sprungraten identifiziert, Positivität ist im Limit gesichert, und stationäre Maße sind über detailed balance kontrollierbar.[13, 14]

Im nächsten Schritt wird der reversible Budgetanteil als Hamilton-/Liouville–Limes herausgearbeitet, um die klassische Dynamik nicht nur als Diffusion, sondern auch als kontrollierten reversiblen Grenzfall zu verstehen (Kapitel VIII.5). Darauf aufbauend werden in Kapitel VIII.6 und VIII.7 Entropieproduktion und Fluktuationssätze in genau dieser kontinuierlichen Sprache formuliert.

VIII.5 Ehrenfest-/Hamilton–Limes & effektive Trajektorien

Die Kapitel VIII.3 und VIII.4 haben den Übergang $\rho_t \xrightarrow{\mathcal{R}} p_t$ und weiter den kontinuierlichen Limes

$$\partial_t p \;=\; -\partial_i(a_i p) \;+\; \partial_i\partial_j(D_{ij}p)$$

etabliert (vgl. Korollar VIII.3.2.1, Lemma VIII.4.2.1, und Formelkasten VIII.4.2.1).[13, 14] Damit ist geklärt, *wie* aus GKLS-kompatiblen Sprungraten eine klassische Ensemblebeschreibung entsteht.

Für den klassischen Limes im engeren Sinn fehlt nun der entscheidende Schritt: die Isolation des *reversiblen* Anteils, der den Trajektorienbegriff trägt. Genau deshalb trennen wir in diesem Kapitel den driftseitigen Anteil so, dass (i) Liouville- und Hamilton–Jacobi-Strukturen als Grenzformen sichtbar werden und (ii) effektive Trajektorien als robuste Mittelwertdynamik schmaler Pakete erscheinen. Irreversible Korrekturen (Dissipation/Diffusion) bleiben dabei kontrollierte Störungen, statt das Bild zu dominieren.[21]

VIII.5.1 Momentengleichungen und Ehrenfest-Limes

Wir beginnen mit Momenten $\langle f\rangle_t$ glatter Observablen $f(x)$ unter der Fokker–Planck-Dynamik aus Kapitel VIII.4.[13, 14] Dieser Zugriff ist bewusst gewählt: Er zeigt sofort, welche Terme Mittelwerte transportieren (drift) und welche nur die Verteilung verbreitern (diffusion). Damit lässt sich der reversible Kern als genau der Teil identifizieren, der eine Hamilton-Struktur trägt.

Formelkasten VIII.5.1.1: Ehrenfest-Momentendynamik (Konventions-konsistent)

Für glattes f (und hinreichend gute Randabfälle/geeignete Randbedingungen) gilt[13, 14]

$$\frac{d}{dt}\langle f\rangle_t = \int f\,\partial_t p\,dx = \underbrace{\langle a\cdot\nabla f\rangle_t}_{\text{drift}} + \underbrace{\langle D:\nabla\nabla f\rangle_t}_{\text{diffusion}}, \qquad D:\nabla\nabla f := D_{ij}\,\partial_i\partial_j f.$$

Spezialisiert man auf Phasenraumkoordinaten $x=(q,\pi)$ und wählt den reversiblen Anteil als $a^{\mathrm{rev}}(x) = J\nabla H(x)$ (kanonische Symplektik J), so gilt

$$\langle a^{\mathrm{rev}}\cdot\nabla f\rangle_t = \langle\{f,H\}\rangle_t, \qquad \{f,g\} := \nabla f^{\top} J\,\nabla g.$$

Die Aussage ist konzeptionell wichtig: Der driftseitige Beitrag kann so parametrisiert werden, dass er ein Poisson-Bild trägt. Damit ist der Hamilton-Limes nicht „ein neues Postulat“, sondern die Grenzform derjenigen Driftstruktur, die im Budgetbild als reversibel gelesen wird.

[21] Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt zum Hamilton–Limes im Minkowski–Grenzfall (Zeit, Eigenzeit & Minkowski–Geometrie).

Querverweis

Die Zerlegung (reversibel/irreversibel) ist die Kontinuumsform des Budget-Kalküls.[a] Zur GKLS-Struktur (und zur Herkunft nichtnegativer Raten) siehe [b]

[a]Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kap. I.3 „Bilanzgleichungen“.
[b]Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.2 „GKLS–Normalform & Positivität“.

VIII.5.2 Liouville- und Hamilton–Jacobi-Gleichung

Setzt man den irreversiblen Anteil kontrolliert auf null ($D \equiv 0$, $a^{\mathrm{irr}} \equiv 0$), bleibt eine reine Transportdynamik. Dieser Grenzfall ist der richtige Referenzpunkt: Erst relativ zu ihm lässt sich später quantitativ sagen, *wann* Dissipation „nur Korrektur“ und *wann* sie dynamikbestimmend ist.

Formelkasten VIII.5.2.1: Liouville-Gleichung (reversibler Limes)

Sei $x = (q, \pi)$ und $a^{\mathrm{rev}}(x) = J\nabla H(x)$ mit der kanonischen Symplektik J. Dann erfüllt die Dichte $p(x,t)$ im reversiblen Limes

$$\partial_t p(x,t) + \{p, H\}(x,t) = 0, \qquad \{f,g\} := \nabla f^{\top} J\, \nabla g.$$

Die Charakteristiken $t \mapsto x_t$ sind kanonische Trajektorien:

$$\dot{x}_t = J\nabla H(x_t).$$

Die Liouville-Form beantwortet die „Trajektorienfrage“ auf Ensembleebene: Trajektorien sind die Charakteristiken des Transportoperators. Um die zugehörige „Wellenfront“- bzw. Wirkungsbeschreibung zu bekommen, betrachtet man zusätzlich Regime, in denen sich p auf wenige Blätter einer Phasenfunktion konzentriert (WKB-/Large-Deviation-Lesart).

Formelkasten VIII.5.2.2: Hamilton–Jacobi-Gleichung (WKB/LD-Lesart, Scope)

In kleinen-Rausch- bzw. Large-Deviation-Regimen ist eine eikonalartige Darstellung typisch,

$$p(x,t) \;\propto\; \exp\big(-\lambda\, S(x,t)\big), \qquad \lambda \to \infty,$$

wobei λ ein (kalibriert) großer Skalenparameter ist (z. B. invers zur effektiven Rauschstärke oder zur Paketbreite). Im führenden Ordnungsanteil ergibt sich eine Hamilton–Jacobi-Struktur. In der üblichen Konfigurationsraumform mit q gilt

$$\partial_t S(q,t) + H(q, \nabla_q S(q,t)) = 0, \qquad \pi = \nabla_q S.$$

Caustics markieren die Grenzen der Einblättrigkeit (mehrdeutige Zuordnung $q \mapsto \pi$).

Geltungsbereich & Bruchkriterien (operativ)

Der Liouville/HJ-Limes ist als *reversibler* Näherungslimes sinnvoll, wenn zwei Bedingungen gleichzeitig erfüllt sind (hierbei ist $a = a^{\mathrm{rev}} + a^{\mathrm{irr}}$ eine book-keeping Zerlegung, die in den thermodynamischen Kapiteln operationalisiert wird):

1. **Irreversibilität ist klein auf Beobachtungsskalen.** Auf einem Beobachtungsintervall Δt ist die diffusive Verbreiterung klein gegenüber der relevanten Längenskala L,
$$\sqrt{\|D\|\,\Delta t} \;\ll\; L,$$
und der durch a^{irr} induzierte mittlere Versatz ist klein gegenüber dem reversiblen Driftversatz, ausgewertet entlang eines repräsentativen Pfades $t \mapsto x_t$ (z. B. $x_t = \mu_t$ als Mittelwertbahn),
$$\Big\| \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} a^{\mathrm{irr}}(x_t,t)\,dt \Big\| \;\ll\; \Big\| \int_{t_0}^{t_0+\Delta t} a^{\mathrm{rev}}(x_t,t)\,dt \Big\|.$$

2. **Die Verteilung bleibt auf Ehrenfest-Skala schmal.** Die Paketbreite (z. B. Kovarianz Σ_t) bleibt klein genug, so dass eine Trajektorien-/Eikonalbeschreibung nicht durch starke Dephasierung oder Mischung zerstört wird.

Typische Bruchstellen.

- *Chaotik/Mischung:* exponentielle Sensitivität verbreitert Pakete schnell.
- *Caustics/Mehrwertigkeit:* Hamilton–Jacobi wird multi-valued; Wellenfronten falten.
- *Starke Rauschkopplung:* D oder a^{irr} dominieren; Trajektorien sind nicht robust.

In diesen Regimen sind Langevin-/Fokker–Planck-Methoden aus Kapitel VIII.4 maßgeblich.[13, 14]

VIII.5.3 Effektive Trajektorien aus schmalen Paketen

Die Hamilton-Formeln liefern Trajektorien als Charakteristiken. Für Mess- und Modellpraxis ist aber die umgekehrte Richtung oft entscheidend: Wann darf man aus einer statistischen Beschreibung $p(x,t)$ eine „Bahn“ extrahieren, ohne Information zu unterschlagen? Das wird genau dann legitim, wenn die Verteilung als Pointer-Paket schmal bleibt und ihre Breite kontrolliert wächst.[14]

Lemma VIII.5.3.1: Schmale Pointer-Pakete ⇒ effektive Trajektorien

Sei $p(x,t)$ Lösung der Fokker–Planck-Gleichung aus Lemma VIII.4.2.1 mit Mittel μ_t und Kovarianz Σ_t. Gilt $\|\Sigma_t\| \le \delta$ (für kleines δ) und sind a und D lokal Lipschitz, dann folgt[14]

$$\dot{\mu}_t = a(\mu_t, t) + \mathcal{O}(\|\Sigma_t\|),$$

und

$$\dot{\Sigma}_t = \nabla a(\mu_t, t)\,\Sigma_t + \Sigma_t\,\nabla a(\mu_t, t)^\top + 2\,D(\mu_t, t) + \mathcal{O}(\|\Sigma_t\|^{3/2}).$$

Im reversiblen Fall $a = J\nabla H$ und $D = 0$ gilt insbesondere

$$\dot{\mu}_t = J\nabla H(\mu_t)$$

bis $\mathcal{O}(\delta)$.

Damit ist der Trajektorienbegriff präzise abgesichert: Die Bahn ist kein zusätzliches Objekt, sondern der führende Term der Momentendynamik, solange die Breite klein bleibt.

Beweisskizze VIII.5.3.1: Schmale Pointer-Pakete ⇒ effektive Trajektorien

Nutze Formelkasten VIII.5.1.1 und entwickle $a(x,t)$ sowie $D(x,t)$ um μ_t (Taylor bis zur linearen Ordnung). Dann ist $\mathbb{E}[a(x,t)] = a(\mu_t,t) + \mathcal{O}(\|\Sigma_t\|)$. Für die Kovarianz ergibt die Standardrechnung (äquivalent zur Itô-Form mit $BB^\top = 2D$, vgl. Formelkasten VIII.4.3.1) den führenden Term $\dot{\Sigma} = (\nabla a)\Sigma + \Sigma(\nabla a)^\top + 2D$, plus höhere Momente, die bei schmalen Paketen durch $\|\Sigma_t\|^{3/2}$ kontrolliert sind.[14]

Korollar VIII.5.3.1: Deterministische Bahn als schwacher Limes

Für $\|\Sigma_0\| \to 0$ und $D \equiv 0$ konvergiert $p(\cdot, t)$ schwach gegen δ_{x_t} mit

$$\dot{x}_t = a(x_t, t).$$

Für kleines, glattes D entsteht eine Langevin-Störung um die deterministische Bahn (Formelkasten VIII.4.3.1).[14]

VIII.5.4 Beispiel und Testfall

Der linear-quadratische Fall ist mehr als ein Spielzeug: Er ist ein Referenztest, weil Momente exakt schließen. Damit kann man unmittelbar prüfen, ob die in Lemma VIII.5.3.1 behauptete Fehlerkontrolle die richtige Größenordnung trifft.

Linear-quadratischer Fall (LQ)

Sei $H(x) = \frac{1}{2}x^\top K x$ mit symmetrischem K. Dann ist $a^{\mathrm{rev}}(x) = JKx$, also $\nabla a^{\mathrm{rev}} = JK$ konstant, und (für allgemein D)

$$\dot{\mu}_t = JK\mu_t, \qquad \dot{\Sigma}_t = (JK)\Sigma_t + \Sigma_t(JK)^\top + 2D.$$

Für $D = 0$ ergibt sich die geschlossene Lösung

$$\Sigma_t = M_t\,\Sigma_0\,M_t^\top, \qquad M_t := e^{JKt},$$

d. h. die Verteilung wird durch den Hamilton-Fluss transportiert (Liouville, Formelkasten VIII.5.2.1); Σ_t ist im Allgemeinen nicht konstant, sondern folgt der linearen (symplektischen) Verformung.

VIII.5.5 Einordnung & Verweise

Der Hamilton-Limes realisiert den klassischen Trajektorienbegriff als robusten Mittelwert-Limes: Solange die Verteilung pointer-schmal bleibt, folgt der Mittelwert einer deterministischen Bahn, und die Breite liefert die kontrollierte Korrektur. Damit ist auch klar, *wo* Thermodynamik ansetzt: Dissipation und Diffusion sind genau die Terme, die Trajektorien verbreitern, Kontraste abbauen und Entropieproduktion tragen.[16]

Die Verbindung zur Eigenzeitgeometrie ist im Minkowski-Rahmen ausgearbeitet.[22] Thermodynamische Korrekturen (Dissipation, FDT) werden in Kapitel VIII.6 und VIII.7 analysiert. Zu Einheiten- und Skalenfragen siehe [23]

[22] Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt zum Hamilton–Limes im Minkowski–Grenzfall.

[23] Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Kap. VII.1–VII.3 „Kalibration, thermische & Antwort-Skalen“.

VIII.6 Thermodynamik I: Entropieproduktion, DPI/Spohn & zweiter Hauptsatz

Wir formulieren den zweiten Hauptsatz im FBA direkt aus der GKLS-Dynamik und dem Budget-Kalkül. Zentral sind (i) eine präzise Definition der *Entropieproduktion* als Größe irreversibler Budgetnutzung, (ii) Spohn/DPI als Monotonieprinzip für *unselektierte* Prozesse und (iii) die Clausius-Bilanz inklusive Landauer-Bound im isothermen Limes. [24] [25] [26] Die mathematische Quelle sind GKLS-Struktur und Monotonien der relativen Entropie: GKLS [6, 7], Spohn-Produktion [5] und Datenverarbeitung [3, 4]. Der Leitgedanke ist: *Irreversibilität* erscheint als kontraktive Datenverarbeitung (Spohn/DPI) und wird im Budgetbild als *positiver irreversibler Anteil* bilanziert.

VIII.6.1 Definitionen & Bilanzgleichungen

Wir betrachten eine (ggf. zeitlokale, CP-divisible) GKLS-Dynamik $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_t(\rho_t)$ [6–8]. Als thermische Referenz verwenden wir einen (stationären oder instantanen) Referenzzustand $\rho_t^\star$ mit $\mathcal{L}_t(\rho_t^\star) = 0$. [27] [28] Äußere Kopplungen sind als *Bäder* α mit inversen Temperaturen β_α modelliert; die zugehörigen Wärmeflüsse $\dot{Q}_\alpha$ zählen im *externen* Budget.[29] Wir verwenden durchgehend die Vorzeichenkonvention $\dot{Q}_\alpha > 0$ *ins System.*

[24]Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kap. I.5 (GKLS, Kraus/Stinespring, Spohn; DPI-Pfeil & No-Recovery).

[25]Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.2–IV.7 (GKLS-Generator, stationäre Zustände, detailed balance).

[26]Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Kap. VII.1–VII.2 (Kalibration & thermische Skalen).

[27]Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kap. I.5 (GKLS-Generatoren; Spohn-Monotonie).

[28]Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.7 (Stationäre Zustände & detailed balance).

[29]Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kap. I.3 (Bilanzgleichungen: intern/extern/irreversibel).

Definition VIII.6.1.1: Entropieproduktion $\dot{\Sigma}$, Austauschterm Φ (Kalibration)

Entropien (Einheiten). Wir verwenden $S(\rho) := -\mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$ als *dimensionlose* von-Neumann-Entropie (in ln-Einheiten, „nats“) [18]; die physikalische Entropie ist $k_B S$. Für Logarithmen setzen wir (für die jeweiligen Träger) die üblichen Stütz-/Vollranganahmen voraus; andernfalls ist die relative Entropie nicht endlich und Aussagen sind nur nach geeigneter Restriktion/Regularisierung sinnvoll.

Die *Entropieproduktionsrate* (unselektiert) ist die Spohn-Produktion relativ zu $\rho_t^\star$ [5]:

$$\dot{\Sigma}(t) \;:=\; -\mathrm{tr}\Big(\mathcal{L}_t(\rho_t)\,[\,\ln \rho_t - \ln \rho_t^\star]\Big) \;\geq\; 0.$$

Die *integrierte* Entropieproduktion auf $[t_0, t_1]$ ist $\Sigma = \int_{t_0}^{t_1} \dot{\Sigma}(t)\,dt$.

Der *Austauschterm* (Entropiefluss in die Umgebung, in thermischen Einheiten) ist durch die Bilanzdefinition

$$\Phi(t) \;:=\; \dot{S}_{\mathrm{sys}}(t) \;-\; \dot{\Sigma}(t)$$

festgelegt, wobei $\dot{S}_{\mathrm{sys}}(t) := \frac{d}{dt} S(\rho_t)$ die Systementropierate ist.

Thermische Kalibration. In Badmodellen mit Temperaturen β_α^{-1} wird Φ operativ als

$$\Phi(t) \;=\; \sum_\alpha \beta_\alpha(t)\,\dot{Q}_\alpha(t)$$

kalibriert, wobei $\dot{Q}_\alpha > 0$ die Wärmeaufnahme des Systems aus Bad α bezeichnet.

Budget-Anschluss (thermisches Konto). Wir lesen die irreversible interne Budgetrate im entropischen Konto als

$$\dot{b}_{\mathrm{irr}}^{(S)}(t) \;:=\; k_B\,\dot{\Sigma}(t) \;\geq\; 0, \qquad b_{\mathrm{irr}}^{(S)}[t_0, t_1] = \int_{t_0}^{t_1} k_B\,\dot{\Sigma}(t)\,dt.$$

Diese Form ist absichtlich so gewählt, dass die Monotoniequelle transparent bleibt: $\dot{\Sigma}$ ist ein Generator-Ausdruck, der für unselektierte GKLS-Dynamik durch Spohn/DPI kontrolliert ist [3–5]. Der Austauschterm Φ ist die (kalibrierte) Brücke zur Clausius-Sprache.[30]

[30] Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Kap. VII.1–VII.2 (thermische Skalen / β-Kalibration).

Formelkasten VIII.6.1.1: Clausius-Bilanz & System-/Umweltentropien

Mit der (dimensionlosen) von-Neumann-Entropie $S(\rho) = -\mathrm{tr}(\rho \ln \rho)$ gilt identisch

$$\dot{S}_{\mathrm{sys}}(t) \;+\; \dot{S}_{\mathrm{env}}(t) \;=\; \dot{\Sigma}(t), \qquad \dot{S}_{\mathrm{env}}(t) \;:=\; -\Phi(t).$$

Unter thermischer Kalibration (Definition VIII.6.1.1) ist damit

$$\dot{S}_{\mathrm{env}}(t) \;=\; -\sum_{\alpha} \beta_\alpha(t)\, \dot{Q}_\alpha(t).$$

Im isothermen Ein-Bad-Fall ($\beta_\alpha \equiv \beta$) reduziert sich dies zu

$$\dot{S}_{\mathrm{sys}}(t) - \beta\, \dot{Q}(t) = \dot{\Sigma}(t).$$

VIII.6.2 Spohn-Monotonie & zweiter Hauptsatz

Der zweite Hauptsatz ist hier kein Postulat: Er folgt als Monotonieaussage aus der Zulässigkeit (GKLS/CP-divisible) und der Wahl eines passenden Referenzzustands $\rho_t^\star$ [5–7]. Wichtig ist dabei die Protokollklasse: Wir betrachten *unselektierte* Dynamik (keine Postselektion, kein unbilanzierter Feedback-Schritt).[31]

Lemma VIII.6.2.1: Spohn-Monotonie $\Rightarrow \dot{\Sigma} \geq 0$ (zweiter Hauptsatz)

Sei $\dot{\rho}_t = \mathcal{L}_t(\rho_t)$ unselektiert GKLS/CP-divisible und $\rho_t^\star$ mit $\mathcal{L}_t(\rho_t^\star) = 0$. Dann gilt für alle t:

$$\dot{\Sigma}(t) \;\geq\; 0.$$

Unter thermischer Kalibration (Definition VIII.6.1.1) folgt aus Formelkasten VIII.6.1.1 die Clausius-Ungleichung

$$\dot{S}_{\mathrm{sys}}(t) \;\geq\; \sum_{\alpha} \beta_\alpha(t)\, \dot{Q}_\alpha(t).$$

Im Spezialfall $\rho_t^\star \equiv \rho^\star$ (zeitunabhängig) ist äquivalent

$$\dot{\Sigma}(t) \;=\; -\frac{d}{dt} D(\rho_t \| \rho^\star) \;\geq\; 0,$$

konsistent mit Datenverarbeitung der relativen Entropie [3, 4].

[31] Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Kap. III.4–III.5 (Instrumente & selektive Operationen).

Korollar VIII.6.2.1: Integrierter zweiter Hauptsatz

Für jedes Intervall $[t_0, t_1]$ gilt

$$\Sigma[t_0, t_1] \;=\; \int_{t_0}^{t_1} \dot{\Sigma}(t)\, dt \;\geq\; 0.$$

Insbesondere folgt aus Formelkasten VIII.6.1.1 die integrierte Clausius-Form

$$\Delta S_{\mathrm{sys}}[t_0, t_1] \;-\; \int_{t_0}^{t_1} \sum_{\alpha} \beta_\alpha(t)\, \dot{Q}_\alpha(t)\, dt \;\geq\; 0.$$

Im isothermen Ein-Bad-Fall: $\Delta S_{\mathrm{sys}} - \beta\, Q \geq 0$ mit $Q = \int \dot{Q}\, dt$ und $Q > 0$ ins System.

VIII.6.3 Landauer-Bound im FBA

Informationstilgung ist im FBA ein Spezialfall: Sie erzwingt eine Kontraktion (Reset/Coarse-Graining) und benötigt daher positives irreversibles internes Budget. Im isothermen Limes wird diese Mindestkostenaussage zur Landauer-Schranke [19, 20] und damit zu einem sehr direkten Pass/Fail-Test für die Budgetinterpretation von „Information“.

Korollar VIII.6.3.1: Landauer-Bound (isotherm, unselektiert)

Betrachte ein isothermes Ein-Bad-Protokoll bei Temperatur T mit $\beta = (k_B T)^{-1}$ und Vorzeichenkonvention $Q > 0$ *ins System*. Erzwingt ein CPTP/GKLS-Protokoll eine Entropiereduktion des Systems um

$$\Delta S^{\downarrow}_{\mathrm{sys}} \;:=\; S(\rho_{t_0}) - S(\rho_{t_1}) \;\geq\; 0,$$

so ist die an das Bad abgegebene Wärme

$$Q_{\mathrm{bath}} \;:=\; -\int_{t_0}^{t_1} \dot{Q}(t)\, dt \;\geq\; 0$$

nach unten beschränkt durch

$$Q_{\mathrm{bath}} \;\geq\; k_B T\, \Delta S^{\downarrow}_{\mathrm{sys}}.$$

Äquivalent: $\beta Q_{\mathrm{bath}} \geq \Delta S^{\downarrow}_{\mathrm{sys}}$. Wird die Tilgung als Löschung von ΔI *Bits* angegeben, so ist $\Delta S^{\downarrow}_{\mathrm{sys}} = \Delta I\, \ln 2$. Gleichheit ist nur im quasistatischen (reversiblen) Grenzfall unter geeigneten Gleichgewichts-/Balancebedingungen erreichbar.

VIII.6.4 Additivität, Lokalität & Messungen

Für zusammengesetzte Systeme muss $\dot{\Sigma}$ mit der Kompositionsstruktur verträglich sein. Gleichzeitig ist es essenziell, Mess- und Feedbackprotokolle sauber vom unselektierten GKLS-Fluss zu trennen: Nur im unselektierten Bild gelten die Monotonien als „harte“ zweite-HS-

Aussagen. [32] [33]

Lemma VIII.6.4.1: Komposition, Entropieflüsse & Korrelationsterm

Sei ein zusammengesetztes System AB lokal an unabhängige Bäder gekoppelt, so dass die Wärmeflüsse addieren ($\Phi_{AB} = \Phi_A + \Phi_B$) und der GKLS-Generator keine Wechselterme enthält ($\mathcal{L}_{AB} = \mathcal{L}_A \otimes \mathrm{id} + \mathrm{id} \otimes \mathcal{L}_B$). Dann gilt identisch

$$\dot{\Sigma}_{AB}(t) \;=\; \dot{\Sigma}_A(t) + \dot{\Sigma}_B(t) \;-\; \frac{d}{dt} I(A{:}B)_t, \qquad I(A{:}B) := S(\rho_A) + S(\rho_B) - S(\rho_{AB}).$$

Insbesondere ist $\dot{\Sigma}_{AB} = \dot{\Sigma}_A + \dot{\Sigma}_B$, wenn $I(A{:}B)_t$ auf der betrachteten Protokollklasse konstant/vernachlässigbar ist (z. B. bei strikt entkoppelter Dynamik, die Produktzustände erhält).

Selektivität, Feedback & Grenzen der Monotonie

Selektive (postselektierte) Protokolle sind *nicht* von Lemma VIII.6.2.1 erfasst; dort kann $\dot{\Sigma}$ entlang einzelner Zweige effektiv „negativ“ erscheinen, weil Konditionierung/Informationsextraktion ohne unselektiertes Mittel betrachtet wird. Im Mittel über die Ausgänge (unselektiert) ist die Monotonie wiederhergestellt.

VIII.6.5 Beispiel: Zwei-Niveau-System im Wärmekontakt

Im Minimalmodell sieht man die Struktur besonders transparent: detailed balance fixiert das stationäre Maß, und $\dot{\Sigma} \geq 0$ wird zur expliziten Summenform über Übergänge [8, 14].

[32] Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kap. I.6 (Komposition, Lokalität & No-Signalling).

[33] Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Kap. III.4–III.5 (Instrumente; selektiv vs. unselektiv).

Qubit mit thermischem Bad (detailed balance)

Setup. Sei $H = \frac{\hbar\omega}{2}\sigma_z$ und ein thermischer GKLS-Dissipator mit Auf-/Abregungsraten

$$\gamma_\downarrow = \gamma\,(n_\beta + 1), \qquad \gamma_\uparrow = \gamma\, n_\beta, \qquad n_\beta := \left(e^{\beta\hbar\omega} - 1\right)^{-1}.$$

Dann gilt $\gamma_\uparrow/\gamma_\downarrow = e^{-\beta\hbar\omega}$ (lokale detailed balance).

Populationsdynamik (klassischer Zwei-Zustands-Fluss). Für $p_e(t) = \langle e|\rho_t|e\rangle$, $p_g(t) = 1 - p_e(t)$ gilt

$$\dot p_e = -\gamma_\downarrow p_e + \gamma_\uparrow p_g, \qquad \dot p_g = -\dot p_e.$$

Der stationäre Zustand erfüllt

$$\frac{p_e^\star}{p_g^\star} = \frac{\gamma_\uparrow}{\gamma_\downarrow} = e^{-\beta\hbar\omega}.$$

Entropieproduktion. Mit dem (netto) Übergangsstrom $J := \gamma_\downarrow p_e - \gamma_\uparrow p_g$ ist die (totale) EP-Rate

$$\dot\Sigma = J\,\ln\frac{\gamma_\downarrow p_e}{\gamma_\uparrow p_g} = J\,\ln\frac{p_e/p_g}{p_e^\star/p_g^\star} \;\geq\; 0,$$

denn $(x-y)\ln(x/y) \geq 0$ für $x = \gamma_\downarrow p_e$, $y = \gamma_\uparrow p_g$. Dies ist die explizite Zwei-Niveau-Instanz von Lemma VIII.6.2.1.

VIII.6.6 Einordnung & Ausblick

Wir haben $\dot\Sigma$ als präzise Größe irreversibler Budgetnutzung etabliert und den zweiten Hauptsatz aus Spohn/DPI deduziert. Kapitel VIII.7 erweitert dies auf *Fluktuationssätze* (Crooks/Jarzynski) [21, 22] und verbindet Budgetflüsse mit Pfad-Wahrscheinlichkeiten. Für experimentelle Tests (Linearresponse/FDT) siehe außerdem Kapitel VIII.9 und das Test-Playbook.[34]

[34] Siehe FBA Teil X: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA → QM ↔ ART, Kap. X.2 (Testgrößen & Protokolle).

VIII.7 Thermodynamik II: Fluktuationssätze (Crooks/Jarzynski) im FBA

Aufbauend auf Kapitel VIII.6 (Entropieproduktion & zweiter Hauptsatz) formulieren wir Fluktuationssätze für *endliche* Protokolle im isothermen Limes [16, 21–23]. Ausgangspunkt sind die effektiven klassischen Beschreibungen aus Kapitel VIII.3 und VIII.4 sowie die konkreten Kontinuumsformen aus Korollar VIII.3.2.1, Lemma VIII.4.2.1, und Formelkasten VIII.4.2.1. Die zentralen Aussagen sind (i) ein *integraler* Fluktuationssatz für die totale Entropieproduktion, (ii) die *Crooks*-Relation und (iii) die *Jarzynski*-Gleichung. [35] [36]

VIII.7.1 Setting: Protokolle, Pfade, Zeitumkehr

Wir betrachten eine zeitabhängige Kopplung/Steuerung $\lambda_t \in \Lambda$ auf dem effektiven Raum stetiger Pointer–Variablen x. Die Dynamik ist als Master– oder Fokker–Planck–Gleichung gegeben; Pfade $\gamma = \{x_t\}_{t\in[0,\tau]}$ tragen Budgetflüsse (Arbeit W, Wärme Q) gemäß der Stromdarstellung aus Formelkasten VIII.4.2.1 sowie der Budgetbilanz aus den FBA - Grundlagen. [37] Wir verwenden durchgehend die in Kapitel VIII.6 festgelegten Vorzeichen: $Q > 0$ bedeutet Wärme *ins System* und $W > 0$ Arbeit *am System*. Damit wird Irreversibilität direkt auf Trajektorienebene messbar: als Verhältnis von Vorwärts- und Rückwärts-Pfadmaß [16, 23].

Definition VIII.7.1.1: Protokoll, Pfadmaß & Mikroreversibilität

Protokoll. Eine stückweise glatte Steuerung $\lambda : [0, \tau] \to \Lambda$. Vorwärts: $\lambda_F(t) = \lambda_t$. Rückwärts: $\lambda_R(t) = \lambda_{\tau-t}$.

Pfade & Pfadmaße. Pfad $\gamma = \{x_t\}_{t\in[0,\tau]}$. Vorwärtsstart (isothermes Gleichgewicht)

$$p_0^{\mathrm{eq}}(x) = Z_0^{-1} e^{-\beta E(x,\lambda_0)}, \qquad Z_0 := \int e^{-\beta E(x,\lambda_0)} dx,$$

Pfadmaß $\mathbb{P}_F[\gamma]$. Rückwärtsstart

$$p_\tau^{\mathrm{eq}}(x) = Z_\tau^{-1} e^{-\beta E(x,\lambda_\tau)}, \qquad Z_\tau := \int e^{-\beta E(x,\lambda_\tau)} dx,$$

Zeitumkehr $\tilde{\gamma}_t := \Theta\, \gamma_{\tau-t}$ mit Paritätsoperator Θ (z. B. $\Theta(q,p) = (q,-p)$), Pfadmaß $\mathbb{P}_R[\tilde{\gamma}]$.

Lokale detaillierte Balance (ldb). Für elementare Übergänge (Sprung- oder Diffusionsschritt) gilt [16, 23]

$$\ln \frac{w_F(x' \mid x; \lambda_t)}{w_R(\Theta x \mid \Theta x'; \lambda_{\tau-t})} = -\, \beta\, q_t(x \to x')\,,$$

wobei $w_{F/R}$ die jeweiligen Übergangsraten (diskret) bzw. Kurzzeit-Propagator-Dichten (Diffusion) sind. Hier bezeichnet q_t die *instantane* Wärmeaufnahme des *Systems* (Konvention: positiv „ins System“).

---

[35] Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Kap. VII.1–VII.2 (Kalibration & thermische Skalen).

[36] Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.7 (Stationäre Zustände & detailed balance).

[37] Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kap. I.3 (Bilanzgleichungen).

VIII.7.2 Integraler Fluktuationssatz (IFT)

Auf Pfadebene misst die totale Entropieproduktion $\Sigma[\gamma]$ die Irreversibilität der Trajektorie; formal ist Σ die Log-Dichte eines Radon–Nikodym-Verhältnisses der Pfadmaße [16, 23].

Lemma VIII.7.2.1: IFT für die totale Entropieproduktion

Sei

$$\Sigma[\gamma] \;:=\; \ln \frac{\mathbb{P}_F[\gamma]}{\mathbb{P}_R[\tilde{\gamma}]}\,.$$

Dann gilt

$$\big\langle e^{-\Sigma[\gamma]} \big\rangle_F \;=\; 1\,, \qquad \text{folglich} \qquad \langle \Sigma \rangle_F \;\geq\; 0.$$

Formelkasten VIII.7.2.1: Trajektorien-EP und EP–Arbeit–Relation (isotherm)

Für ein isothermes Bad ($\beta = \text{konst.}$) und Vorzeichen $Q > 0$ „ins System“ lässt sich die totale Trajektorien-EP als

$$\Sigma[\gamma] \;=\; \Delta s_{\text{sys}}[\gamma] \;-\; \beta\, Q[\gamma], \qquad \Delta s_{\text{sys}}[\gamma] := -\ln p(x_\tau, \tau) + \ln p(x_0, 0),$$

schreiben [16, 23]. Unter Gleichgewichtsrandbedingungen aus Definition VIII.7.1.1 reduziert sich dies zu

$$\Sigma[\gamma] \;=\; \beta(W[\gamma] - \Delta F), \qquad F(\lambda) := -\beta^{-1} \ln Z(\lambda), \quad \Delta F := F(\lambda_\tau) - F(\lambda_0),$$

und $W_{\text{diss}} := W - \Delta F$ ist die dissipierte Arbeit.

VIII.7.3 Crooks-Relation

Crooks ist die „differenzierte“ Version des IFT und verknüpft die *Arbeitsverteilungen* von Vorwärts- und Rückwärtsprozess [21].

Formelkasten VIII.7.3.1: Crooks-Fluktuationsrelation

Unter isothermen Gleichgewichtsstarts gilt

$$\frac{P_F(W)}{P_R(-W)} \;=\; \exp\!\big[\beta\,(W - \Delta F)\big].$$

Der Schnittpunkt $P_F(W) = P_R(-W)$ liegt bei $W = \Delta F$.

VIII.7.4 Jarzynski-Gleichung & zweiter Hauptsatz

Jarzynski folgt als Momentenidentität aus Crooks/IFT und macht ΔF experimentell zugänglich [21, 22].

Formelkasten VIII.7.4.1: Jarzynski-Gleichung

$$\left\langle e^{-\beta W} \right\rangle_F \;=\; e^{-\beta \Delta F}\,.$$

Korollar VIII.7.4.1: Zweiter Hauptsatz aus Jarzynski (Jensen)

Aus Formelkasten VIII.7.4.1 folgt $\langle W \rangle_F \geq \Delta F$ und damit

$$\beta \, \langle W_{\mathrm{diss}} \rangle_F = \langle \Sigma \rangle_F \geq 0.$$

VIII.7.5 Verallgemeinerungen & praktische Aspekte

Für Anwendungen sind Nichtgleichgewichtsstationarität, Mehrbäder und Schätzverfahren besonders wichtig [16].

NESS/Hatano–Sasa, Mehrbäder, Messpraxis

1. **Nichtgleichgewichtsstationär (NESS) / Hatano–Sasa.** Für ein stationäres Nichtgleichgewichtsmaß $p^{\mathrm{ss}}(x|\lambda)$ und $\phi(x,\lambda) := -\ln p^{\mathrm{ss}}(x|\lambda)$ gilt der Hatano–Sasa-IFT [24]:
$$Y[\gamma] \;:=\; \int_0^\tau \dot{\lambda}_t \cdot \partial_\lambda \phi(x_t, \lambda_t)\, dt, \qquad \langle e^{-Y[\gamma]} \rangle = 1.$$
(In Modellen mit lokaler detaillierter Balance lässt sich Y mit dem „excess“-Anteil der Dissipation identifizieren.)

2. **Mehrbäder.** Bei mehreren Bädern α mit inversen Temperaturen β_α gilt allgemein [16]
$$\Sigma[\gamma] \;=\; \Delta s_{\mathrm{sys}}[\gamma] \;-\; \sum_\alpha \beta_\alpha \, Q_\alpha[\gamma],$$
mit Konvention $Q_\alpha > 0$ „ins System“.

3. **ΔF-Schätzung aus Nichtgleichgewichtsarbeiten.** Jarzynski ist exponentielles Reweighting; in der Praxis sind Forward/Reverse-Kombinationsschätzer wie Bennett-Acceptance-Ratio zentral [25].

4. **Experiment / Datenanalyse.** *Arbeit* aus Trajektorienarbeit (Kraft–Weg/parametric work), *Wärme* aus Stromdaten (vgl. Formelkasten VIII.4.2.1) und Leistungsflüssen.

VIII.7.6 Einordnung & Ausblick

Die Fluktuationssätze präzisieren den zweiten Hauptsatz auf Pfadebene und identifizieren Σ mit dem *irreversiblen internen* Budget entlang einzelner Trajektorien [16, 23]. In Kapitel VIII.8 definieren und operationalisieren wir *Altern* als integrierten irreversiblen internen Budgetfluss entlang von Weltlinien und grenzen es scharf von der Eigenzeit ab; Beobachtungs- und Vergleichsprotokolle werden explizit angegeben.

VIII.8 Altern im FBA: Definition, Metrik & Beobachtbarkeit

In diesem Kapitel präzisieren wir *Altern* als integrierte *irreversible interne* Budgetnutzung entlang einer Weltlinie und grenzen es gegenüber der Eigenzeit ab. Der Punkt ist dabei nicht semantisch, sondern operational: τ_{geo} misst den kinematisch-geometrischen (reversiblen) Anteil, während A genau den Anteil akkumuliert, der durch irreversible interne Dynamik (Dissipation/Informationsverlust) entsteht.

Zwei Brücken machen A beobachtbar: (i) die Verbindung zur Entropieproduktion aus Spohn/DPI (Lemma VIII.6.2.1) und (ii) die klassische Effektivdynamik aus Kapitel VIII.3 und VIII.4, aus der praktische Schätzer in Master- und Fokker–Planck-Sprache folgen (Korollar VIII.3.2.1, Lemma VIII.4.2.1, und Formelkasten VIII.4.2.1).[38][39]

VIII.8.1 Definition & Grundstruktur

Wir beginnen mit der Definition entlang einer Weltlinie γ. Wichtig ist: A ist im FBA eine *kalibrierte Zeitgröße*, die aus der irreversiblen *internen* Budgetnutzung entsteht. Zur Klarheit trennen wir (i) die *Budgetakkumulation* und (ii) die daraus über die Zeitkalibration abgeleitete *Alternzeit*. (Die Parametrisierung entlang γ ist frei; A ist als Linienfunktional parametrisierungsinvariant.)

Definition VIII.8.1.1: Altern (operative Größe)

Sei γ eine Weltlinie eines Systems im Frame–Budget–Ansatz und $\dot{b}_{\text{irr,int}}(\lambda) \geq 0$ die *irreversible interne* Budgetrate in einem beliebigen Schritt-/Kontinuumsparameter λ. Die *irreversible interne Budgetakkumulation* ist

$$B_{\text{irr,int}}[\gamma] \;:=\; \int_\gamma \dot{b}_{\text{irr,int}}(\lambda)\, d\lambda \;\geq 0.$$

Mit der Zeitkalibration κ_τ (so dass $d\tau = db/\kappa_\tau$) definieren wir das *Altern* als

$$A[\gamma] \;:=\; \frac{1}{\kappa_\tau}\, B_{\text{irr,int}}[\gamma] \;=\; \frac{1}{\kappa_\tau} \int_\gamma \dot{b}_{\text{irr,int}}(\lambda)\, d\lambda \;\geq 0.$$

Die Eigenzeit spielt im FBA eine doppelte Rolle: als geometrisch-kinematischer Anteil im Minkowski-Limes und als totale, budgetseitige Akkumulation inklusive irreversibler Anteile. Die folgende Zerlegung ist die formale Trennlinie zwischen „Kinematik“ und „Thermo-Dynamik“ entlang derselben Weltlinie.

[38] Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Kap. II.4 sowie Kap. II.6–II.7 (Eigenzeit & Altern; Minkowski-Limes & Lorentz-Kinematik).

[39] Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Kap. VII.1–VII.2 (thermische Skalen).

Formelkasten VIII.8.1.1: Eigenzeitzerlegung: geometrisch vs. Altern

Die *totale* Eigenzeit entlang γ zerlegt sich in

$$\tau_{\text{tot}}[\gamma] \;=\; \tau_{\text{geo}}[\gamma] \;+\; A[\gamma],$$

wobei τ_{geo} aus dem *reversiblen internen* Budget (Minkowski-Limes) stammt und A ausschließlich den *irreversiblen internen* Anteil akkumuliert ([a]).

[a] Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Kap. II.4 (Eigenzeit & Altern).

Damit ist zugleich klar, welche Aussagen *nicht* automatisch folgen: Ein Unterschied in τ_{geo} (Zeitdilatation, Kinematik) ist für sich genommen kein Unterschied in A, solange die lokal relevante irreversible interne Dynamik unverändert realisiert wird. Umgekehrt kann A variieren, ohne dass sich τ_{geo} ändert.

Lemma VIII.8.1.1: Basiseigenschaften von A

Für beliebige konkatenierte Teilstücke $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ und reparametrisierte $\tilde{\gamma}$ gelten:

1. **Nichtnegativität:** $A[\gamma] \geq 0$.
2. **Additivität:** $A[\Gamma] = A[\Gamma_1] + A[\Gamma_2]$.
3. **Parametrisierungsinvarianz:** $A[\tilde{\gamma}] = A[\gamma]$.
4. **Entkopplung von Kinematik (Scope):** Wird dieselbe interne irreversible Dynamik *als Funktion derselben lokalen Prozessparametrisierung* realisiert (z. B. als Funktion der lokalen Eigenzeit bzw. bei identischen internen Kopplungen), dann ändert eine reine Kinematikvariation (Zeitdilatation) τ_{geo}, aber nicht das Funktional A.

VIII.8.2 Thermische Kalibration & Entropieproduktion

Zur Messbarkeit koppeln wir A an Entropie- und Wärmeflüsse. Der Kernmechanismus ist derselbe wie in Kapitel VIII.6: Spohn/DPI liefert $\dot{\Sigma} \geq 0$ als Irreversibilitätsmaß für *unselektierte* Flüsse.[5–7] Im FBA kommt die Buchhaltung hinzu: Beiträge, die im Modell als Bad-/Austauschkopplung geführt werden, werden explizit im *externen* Budgetkonto bilanziert; der verbleibende, modellabhängig zugewiesene Rest ist *intern* bilanzierte Irreversibilität.

Definition VIII.8.2.1: „Intern“ vs. „extern“ in Σ (Bilanz-Entscheidung)

Schreibe die (effektive) unselektierte Dynamik als Summe bilanziell zugeordneter Beiträge, z. B. auf GKLS-Ebene

$$\mathcal{L}_t \;=\; \mathcal{L}_t^{\mathrm{rev}} \;+\; \sum_{\alpha\in \mathrm{ext}} \mathcal{D}_t^{(\alpha)} \;+\; \sum_{\ell\in \mathrm{int}} \mathcal{D}_t^{(\ell)},$$

wobei α „extern“ (Bad-/Austauschkonto) und ℓ „intern“ (interne Dissipation/Verlustkanäle im Modellkonto) bezeichnet. Dann ist $\dot{\Sigma}(t)$ die Gesamt-EP aus Definition VIII.6.1.1, und $\dot{\Sigma}_{\mathrm{int}}(t)$ meint die durch die als „intern“ klassifizierten dissipativen Terme getragene EP (operational: dieselbe EP-Formel, aber mit der Summe/Integration nur über die intern bilanzierten Kanäle).

Im isothermen Ein-Bad-Fall ist die Umrechnung besonders transparent: $\beta^{-1} = k_B T$ setzt die thermische Energieskala, mit der dimensionslose Entropieproduktion in ein Energieäquivalent übersetzt werden kann; mit κ_τ wird daraus eine Alternzeit.

Formelkasten VIII.8.2.1: Kalibrierung über Entropieproduktion (isotherm)

Bei Kopplung an ein Bad mit konstanter $\beta = (k_B T)^{-1}$ und unselektierter Dynamik definiere $\dot{\Sigma}_{\mathrm{int}}(t) \geq 0$ als den *intern* bilanzierten Anteil der Entropieproduktion (im Sinne von Definition VIII.8.2.1). Dann gilt als operative Kalibrier-/Schätzformel

$$\dot{B}_{\mathrm{irr,int}}(t) \;=\; \beta^{-1}\, \dot{\Sigma}_{\mathrm{int}}(t), \qquad \dot{A}(t) \;=\; \frac{1}{\kappa_\tau}\, \dot{B}_{\mathrm{irr,int}}(t) \;=\; \frac{\beta^{-1}}{\kappa_\tau}\, \dot{\Sigma}_{\mathrm{int}}(t).$$

Integriert auf $[t_0, t_1]$ folgt

$$A[t_0, t_1] \;=\; \frac{\beta^{-1}}{\kappa_\tau} \int_{t_0}^{t_1} \dot{\Sigma}_{\mathrm{int}}(t)\, dt.$$

Interpretation: β^{-1} setzt die thermische Skala (Energieäquivalent pro Einheit EP), κ_τ setzt die Zeitkalibration (Zeit pro Budgeteinheit).

Querverweis

$\dot{\Sigma} \geq 0$ aus Lemma VIII.6.2.1; thermische Bilanz im isothermen Limes aus Formelkasten VIII.6.1.1. Die interne/externe Zuordnung erfolgt über das Budget-Kalkül der FBA - Grundlagen (Kapitel I.3); vgl. Definition VIII.8.2.1. Für Pfadinterpretationen (IFT/Crooks/Jarzynski) vgl. Kapitel VIII.7.

Bemerkung zur Praxis: „intern“ meint hier nicht „im Inneren des Geräts“ im alltagssprachlichen Sinn, sondern „im internen Budgetkonto“ des Modells. Welche Dissipationskanäle dort landen, ist eine *explizite* Modell- und Bilanzentscheidung; genau deshalb ist die Trennung im FBA testbar und nicht bloß Konvention.

VIII.8.3 Operative Schätzformeln (Master/FP)

Die in Kapitel VIII.3 und VIII.4 etablierten klassischen Generatoren und Stromformen liefern sofort praktische Schätzer für $\dot{A}$. Wir geben beide Standardfälle an: (i) diskrete Markov-Sprünge (Master) und (ii) Diffusionen (FP/Langevin). In beiden Fällen ist der strukturelle Kern identisch: Entropieproduktion ist ein Funktional irreversibler Ströme (Log-Ratio bzw. Quadratikform).[16, 26, 27]

Formelkasten VIII.8.3.1: Markov-Sprünge: EP-Dichte & A

Für eine zeitlokale Master–Dynamik $\dot{p} = K_t p$ mit Strömen $J_{yx} = K_{yx}p_x - K_{xy}p_y$ ist die (klassische) Entropieproduktionsrate

$$\dot{\Sigma}(t) = \tfrac{1}{2} \sum_{x,y} J_{yx}(t) \ln \frac{K_{yx}(t)\, p_x(t)}{K_{xy}(t)\, p_y(t)} \; \geq 0.$$

Der *interne* Anteil $\dot{\Sigma}_{\mathrm{int}}$ (Summe nur über die intern bilanzierten Übergänge) liefert über Formelkasten VIII.8.2.1

$$\dot{A}(t) \;=\; \frac{\beta^{-1}}{\kappa_\tau}\, \dot{\Sigma}_{\mathrm{int}}(t).$$

Für stetige Variablen ist die FP-Stromform besonders nützlich, weil sie die EP als „Dissipation pro Dichte“ ausdrückt.[13, 16]

Formelkasten VIII.8.3.2: Fokker–Planck: Stromformel & A

Für $\partial_t p = -\nabla\cdot J$ mit Strom J aus Formelkasten VIII.4.2.1 und Zerlegung $J = J^{\mathrm{rev}} + J^{\mathrm{irr}}$ gilt

$$\dot{\Sigma}(t) = \int \frac{\left(J^{\mathrm{irr}}(x,t)\right)^{\top} D(x,t)^{+}\, J^{\mathrm{irr}}(x,t)}{p(x,t)}\, dx \;\; \geq 0,$$

wobei D^{+} die (Moore–Penrose-)Pseudoinverse von D bezeichnet (im vollrangigen Fall $D^{+} = D^{-1}$).[a] Der intern bilanzierte Anteil $\dot{\Sigma}_{\mathrm{int}}$ (entsprechend einer Modell-/Bilanzzuordnung) geht dann in

$$\dot{A}(t) \;=\; \frac{\beta^{-1}}{\kappa_\tau}\, \dot{\Sigma}_{\mathrm{int}}(t)$$

ein.

[a] Diese Form ist die robuste Version, falls D nur semidefinit ist; effektiv wird nur über die diffusionsgetriebenen Richtungen dissipiert.

VIII.8.4 Trennschärfe: Altern vs. Eigenzeit

Die konzeptionelle Trennung wird experimentell dann scharf, wenn man „gleiches τ_{geo}“ und „gleiches A“ unabhängig variieren kann. Die folgende Aussage liefert genau diese beiden Kontrollregimes.

Lemma VIII.8.4.1: Gleiche Eigenzeit, unterschiedliches Altern (und umgekehrt)

Betrachte zwei identische Systeme S_1, S_2.

(i) Gleich-τ_{geo}, variierbares A. Haben beide Systeme dieselbe Weltlinie (damit gleiche τ_{geo}) und unterscheiden sich ihre intern dissipativen Kopplungen ($\mathcal{L}^{(1)}_{\text{irr,int}} \neq \mathcal{L}^{(2)}_{\text{irr,int}}$), so gilt im Allgemeinen $A_1 \neq A_2$.

(ii) Unterschiedliche Kinematik, gleiches A (Scope). Werden die intern dissipativen Kopplungen identisch realisiert *in derselben lokalen Prozessparametrisierung* (z. B. identische interne GKLS-Kopplung als Funktion der lokalen Eigenzeit), so kann man $A_1 = A_2$ trotz $\tau_{\text{geo},1} \neq \tau_{\text{geo},2}$ erzeugen.

Beweisskizze VIII.8.4.1: Gleiche Eigenzeit, unterschiedliches Altern (und umgekehrt)

(i) Aus Formelkasten VIII.8.2.1 folgt $\dot{A} \propto \dot{\Sigma}_{\text{int}}$. Unterschiedliche interne dissipative Terme ändern $\dot{\Sigma}_{\text{int}}$ und damit das Integral A, unabhängig davon, ob τ_{geo} gleich ist.

(ii) Wird die interne irreversible Dynamik identisch als Funktion derselben lokalen Parametrisierung realisiert (z. B. als Funktion von τ_{geo}), so bleibt $\dot{\Sigma}_{\text{int}}$ in dieser Parametrisierung gleich; dann ist auch A gleich, während reine Kinematikvariation τ_{geo} verändert.

VIII.8.5 Messprotokolle & Beobachtbarkeit

Wir skizzieren zwei minimal-invasive Protokolle, die A experimentell zugänglich machen. Beide sind so gebaut, dass jeweils nur *eine* der beiden Größen (τ_{geo} bzw. A) gezielt verändert wird, während die andere als Kontrollgröße dient.

Vergleichsuhren mit kontrollierter Dissipation

A1: Gleich-τ_{geo}, variierbares A. Zwei identische Uhren U_{cold} und U_{hot} bewegen sich entlang derselben Weltlinie (gleiche τ_{geo}). Durch eine zusätzliche lokale Rauschquelle (interner GKLS-Operator L_ℓ mit Rate κ) wird nur U_{hot} dissipativ betrieben. Aus der gemessenen internen Entropieproduktion (oder äquivalent aus kalorimetrisch bestimmter interner Dissipation im isothermen Limes) folgt

$$\Delta A = \frac{\beta^{-1}}{\kappa_T} \int_{t_0}^{t_1} \left(\dot{\Sigma}^{\text{hot}}_{\text{int}}(t) - \dot{\Sigma}^{\text{cold}}_{\text{int}}(t) \right) dt.$$

A2: Unterschiedliche Kinematik, gleiches A (Scope). Zwei identische Uhren mit identischen internen GKLS-Kopplungen werden auf zwei Weltlinien mit verschiedener Zeitdilatation geschickt. Kalorimetrische Messung der intern bilanzierten Dissipation bzw. Σ_{int} zeigt $A_1 \approx A_2$, obwohl $\tau_{\text{geo},1} \neq \tau_{\text{geo},2}$, *sofern* die interne Kopplung in derselben lokalen Parametrisierung realisiert wird (z. B. als Funktion der lokalen Eigenzeit).

VIII.8.6 Pass/Fail-Indikatoren (minimale Checkliste)

Zum Abschluss bündeln wir beobachtbare Kriterien, die die Trennung zwischen τ_{geo} und A testen. Diese Punkte sind bewusst so formuliert, dass sie als Datenchecks taugen.

Kernindikatoren für Altern

- **Nichtnegativität/Monotonie:** $\dot{A} \geq 0$ (aus $\dot{\Sigma}_{\mathrm{int}} \geq 0$ via Formelkasten VIII.8.2.1).
- **Additivität:** $A[\Gamma_1 \circ \Gamma_2] = A[\Gamma_1] + A[\Gamma_2]$.
- **Entkopplung von Zeitdilatation (Scope):** Variation der Kinematik bei konstant realisierter interner GKLS-Kopplung in lokaler Parametrisierung ändert τ_{geo}, nicht A.
- **Landauer-Konsistenz (isotherm):** Erzwingt ein Reset eine Informationsreduktion ΔI, so folgt aus Korollar VIII.6.3.1 für die intern irreversible Alternzeit

$$A \geq \frac{\beta^{-1}}{\kappa_\tau} \Delta I.$$

[19, 20]

VIII.8.7 Einordnung & Ausblick

Altern ist damit eine *thermodynamisch-kinetische* Größe des FBA, getrennt von reiner Kinematik (Zeitdilatation) und direkt über Entropie-/Wärmeflüsse schätzbar. Kapitel VIII.9 nutzt diese Trennung für Transport- und Antworttheorie (FDT, Green–Kubo) im Nichtgleichgewicht; Kapitel VIII.10 diskutiert experimentelle Tests und Falsifizierbarkeit sowie die Brücken zu Standardansätzen.

VIII.9 Nichtgleichgewicht & Transport: FDT, Green–Kubo & Budgetflüsse

Dieses Kapitel verbindet das Budget-Bild des FBA mit linearer Antworttheorie.[28, 29] Ausgehend von der kontinuierlichen Beschreibung (Kapitel VIII.3 und VIII.4; Korollar VIII.3.2.1, Lemma VIII.4.2.1, und Formelkasten VIII.4.2.1) und der Entropieproduktion (Kapitel VIII.6; Lemma VIII.6.2.1 und Formelkasten VIII.6.1.1) formulieren wir (i) Fluss–Kraft-Paare, (ii) Fluktuations–Dissipations-Beziehungen (FDT) und (iii) Green–Kubo-Relationen samt Onsager–Casimir-Symmetrien. Die Resultate liefern Positivitäts- und Symmetrieaussagen für Transportkoeffizienten, direkt interpretierbar als Eigenschaften *irreversibler* Budgetnutzung. [40] Die mikroreversiblen Gleichgewichtsannahmen (detailed balance/ldb) sind in [41] sowie in der Pfadformulierung von Kapitel VIII.7 (vgl. Definition VIII.7.1.1) eingeordnet.

VIII.9.1 Flüsse, Kräfte & Entropieproduktion (linearer Limes)

Wir linearisieren um ein stationäres Maß $p^\star$ (im FDT/Onsager-Teil: Gleichgewicht mit Mikroreversibilität/ldb). Irreversible Ströme stammen aus J^{irr} der Fokker–Planck-Form (Formelkasten VIII.4.2.1) bzw. aus Sprungströmen J_{yx} (Master). Der Zweck dieser Linearisierung ist doppelt: (i) sie liefert eine kanonische Definition von Transportkoeffizienten als Antwort auf kleine Antriebe, und (ii) sie macht die Entropieproduktion zu einer quadratischen Form, deren Positivität unmittelbar zu Schranken für $L_{\alpha\beta}$ führt.

Definition VIII.9.1.1: Thermodynamische Kräfte & Flüsse

Seien $\{J_\alpha(t)\}$ beobachtbare *irreversible* Flüsse (z. B. Wärme-, Teilchen-, Impulsstrom), und $\{f_\alpha(t)\}$ die zugehörigen *affinen Kräfte* (Gradienten von $\beta\mu$, βu, $\beta\boldsymbol{v}$ usw.). Im (nahezu) stationären Regime verstehen wir $J_\alpha(t)$ als (makroskopische) Flüsse bzw. Erwartungswerte, so dass im linearen Regime

$$\dot{\Sigma}(t) \;=\; \sum_\alpha f_\alpha(t)\, J_\alpha(t) \;\geq 0,$$

konsistent mit der Clausius-Form Formelkasten VIII.6.1.1 (isotherm: $\beta^{-1}\dot{\Sigma}$ ist ein Dissipations-/Budgetleistungsmaß). Im linearen Antwortregime gilt die kausale Faltung

$$J_\alpha(t) \;=\; \sum_\beta \int_0^\infty \chi_{\alpha\beta}(s)\, f_\beta(t-s)\, ds \;=\; \sum_\beta \int_{-\infty}^t \chi_{\alpha\beta}(t-t')\, f_\beta(t')\, dt'.$$

Querverweis

Zur Zerlegung $J = J^{\mathrm{rev}} + J^{\mathrm{irr}}$ vgl. Formelkasten VIII.4.2.1. Für $\dot{\Sigma} \geq 0$ und die Clausius-Bilanz siehe Lemma VIII.6.2.1 und Formelkasten VIII.6.1.1.

Die Antwortkerne $\chi_{\alpha\beta}$ sind per Konstruktion kausal. Für Gleichgewicht/Stationarität hängt $\chi_{\alpha\beta}$ nur von der Zeitdifferenz ab; genau dann sind Zeit- und Frequenzdarstellungen äquivalent,

[40] Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Kap. VII.1–VII.2 (Kalibration & thermische Skalen).

[41] Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.7 (Stationäre Zustände & detailed balance).

und Transportkoeffizienten lassen sich als Integrale von Gleichgewichtskorrelatoren identifizieren. Damit ist die Bühne für FDT/Green–Kubo gesetzt: *Antwort* wird zu *Fluktuation.*

VIII.9.2 FDT (Zeit- und Frequenzbereich)

Die Fluktuations–Dissipations-Relation verbindet lineare Antwort mit Gleichgewichtsfluktuationen der entsprechenden irreversiblen Flüsse.[28, 29] Konzeptionell ist das im FBA besonders transparent: Dieselben Ströme J_α, die im linearen Regime Dissipation (und damit irreversibles Budget) erzeugen, sind im Gleichgewicht als Fluktuationen messbar. Unter Mikroreversibilität (lokale detailed balance/ldb) wird aus dieser Verbindung eine präzise Identität.

Formelkasten VIII.9.2.1: FDT I (Zeitbereich)

Sei

$$C_{\alpha\beta}(t) \;:=\; \big\langle \delta J_\alpha(t)\, \delta J_\beta(0)\big\rangle_\star, \qquad \delta J_\alpha := J_\alpha - \langle J_\alpha\rangle_\star,$$

der Gleichgewichts-Korrelator im stationären Referenzmaß $p^\star$ (Notation $\langle\cdot\rangle_\star$). Hier bezeichnet $\vartheta(t)$ die Heaviside-Funktion (Kausalität). Unter Mikroreversibilität und für die zu f_β konjugierte Kraft–Fluss-Paarung gilt (klassischer FDT-Limes)

$$\chi_{\alpha\beta}(t) \;=\; \beta\, \vartheta(t)\, C_{\alpha\beta}(t).$$

Insbesondere sind die statischen Koeffizienten

$$L_{\alpha\beta} \;:=\; \int_0^\infty \chi_{\alpha\beta}(t)\, dt \;=\; \beta \int_0^\infty C_{\alpha\beta}(t)\, dt$$

positiv semidefinit (und damit $\dot\Sigma = f^\top L f \geq 0$ im linearen Regime).

Die Heaviside-Funktion $\vartheta(t)$ codiert Kausalität (keine Antwort vor dem Antrieb). Im Frequenzraum werden daraus die üblichen Beziehungen zwischen Spektren und dissipativen (reellen) Teilen der Antwort; diese Form ist oft die direkte Schnittstelle zur Datenanalyse (Spektralschätzer, Transferfunktionen).

Formelkasten VIII.9.2.2: FDT II (Spektralform)

Mit Spektraldichte

$$S_{\alpha\beta}(\omega) \;:=\; \int_{-\infty}^\infty e^{i\omega t} C_{\alpha\beta}(t)\, dt$$

und dynamischer Suszeptibilität

$$\tilde\chi_{\alpha\beta}(\omega) \;:=\; \int_0^\infty e^{i\omega t} \chi_{\alpha\beta}(t)\, dt$$

gilt im Gleichgewicht (klassisch; für die konjugierte Paarung wie in Formelkasten VIII.9.2.1)

$$S_{\alpha\beta}(\omega) \;=\; 2\,\beta^{-1}\, \mathrm{Re}\, \tilde\chi_{\alpha\beta}(\omega) \;=\; 2\, k_B T\, \mathrm{Re}\, \tilde\chi_{\alpha\beta}(\omega).$$

VIII.9.3 Green–Kubo-Relationen & Onsager–Casimir

Die Green–Kubo-Formeln sind die „Messform“ der linearen Antwort: Transportkoeffizienten lassen sich aus Gleichgewichtsdaten (Korrelatoren) gewinnen.[28, 30] Im FBA ist das zugleich eine Budgetaussage: $L_{\alpha\beta}$ parametrisiert, wie stark irreversibles internes Budget bei gegebenen Kräften anfällt. Die Onsager–Casimir-Symmetrien präzisieren, welche Symmetrien man für L erwarten darf, sobald Zeitumkehr-Paritäten (und ggf. externe Felder) bekannt sind.[31–33]

Formelkasten VIII.9.3.1: Green–Kubo (statisch)

Die (statischen) Transportkoeffizienten

$$L_{\alpha\beta} \ := \int_0^\infty \chi_{\alpha\beta}(t)\,dt$$

erfüllen (unter den Gleichgewichtsannahmen der FDT)

$$L_{\alpha\beta} \ = \ \beta\int_0^\infty \langle \delta J_\alpha(t)\,\delta J_\beta(0)\rangle_\star\,dt \ = \ \frac{\beta}{2}\int_{-\infty}^\infty \langle \delta J_\alpha(t)\,\delta J_\beta(0)\rangle_\star\,dt.$$

Lemma VIII.9.3.1: Onsager–Casimir-Symmetrien

Seien $\epsilon_\alpha \in \{+1,-1\}$ die Zeitumkehr-Paritäten der Flüsse J_α. Unter Mikroreversibilität (ldb) gilt

$$L_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) \ = \ \epsilon_\alpha\,\epsilon_\beta\,L_{\beta\alpha}(-\mathbf{B}),$$

insbesondere bei $\mathbf{B}=0$: $L_{\alpha\beta} = \epsilon_\alpha\,\epsilon_\beta\,L_{\beta\alpha}$.

Beweisskizze VIII.9.3.1: Onsager–Casimir-Symmetrien

Zeitumkehr Θ (Parität wie in Definition VIII.7.1.1) mit $\Theta J_\alpha \Theta^{-1} = \epsilon_\alpha J_\alpha$ und ldb implizieren für Gleichgewichtskorrelatoren

$$C_{\alpha\beta}(t;\mathbf{B}) = \epsilon_\alpha\epsilon_\beta\,C_{\beta\alpha}(t;-\mathbf{B}).$$

Integration in Formelkasten VIII.9.3.1 ergibt die Behauptung.

VIII.9.4 Positivität, Schranken & Budget-Interpretation

Im linearen Regime wird die Entropieproduktion zur quadratischen Form in den Kräften. Das ist der schnellste Weg zu robusten Schranken: Positivität von $\dot\Sigma$ *für alle* kleinen Antriebe erzwingt $L \succeq 0$. Damit sind „negative Dissipation“ oder instabile Transportmatrizen im Gleichgewicht ausgeschlossen, unabhängig von mikroskopischen Details.[28, 31]

Korollar VIII.9.4.1: Positivität der Transportmatrix & zweites Gesetz

Die Matrix $L = [L_{\alpha\beta}]$ ist positiv semidefinit. Für beliebige (kleine) Kräfte f gilt

$$\dot{\Sigma}(t) \;=\; \sum_{\alpha\beta} f_\alpha(t)\, L_{\alpha\beta}\, f_\beta(t) \;\geq\; 0.$$

Damit ist die lineare Dissipation $f^\top L f$ eine *untere* Schranke der irreversiblen Budgetrate im linearen Regime (konsistent mit Kapitel VIII.6).

Experimentelle Observablen & Budgetflüsse

Leitfähigkeiten/Viskositäten sind Integrale von Gleichgewichtsfluktuationen – messbar via zeitliche Korrelationsfunktionen. Im FBA sind sie zugleich Raten irreversibler *interner* Budgetnutzung je Kraft: „Dissipation pro Kraftquadrat“. Kalibration mit β (Temperatur) gemäß [a].

[a] Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Kap. VII.1–VII.2 (thermische Skalen).

VIII.9.5 Beispiel: Diffusion, Mobilität & Einstein-Relation

Als Minimalfall demonstriert Brownsche Bewegung die Verknüpfung aus (i) Antwort auf ein kleines Kraftfeld, (ii) Fluktuationen im Gleichgewicht und (iii) thermischer Kalibration über k_BT.[28, 34] Gerade dieser Fall eignet sich als „Sanity Check“ für Datenanalyse: Er testet gleichzeitig die Korrelatorschätzung und die korrekte Temperaturkalibration.

Einstein–Relation $D = \mu\, k_BT$ (underdamped)

Betrachte ein 1D-underdamped Langevin-System im Gleichgewicht bei Temperatur T,

$$m\,\dot{v}(t) = -\gamma\, v(t) + f + \sqrt{2\gamma\, k_BT}\,\xi(t), \qquad \dot{x}(t) = v(t),$$

mit $\langle \xi(t)\rangle = 0$, $\langle \xi(t)\xi(t')\rangle = \delta(t-t')$, und kleinem konstantem Kraftfeld f.

1. **Mobilität (Definition).** Im stationären linearen Regime ist

$$\langle v\rangle \;=\; \mu\, f, \qquad \mu = \gamma^{-1}.$$

2. **Diffusion (Green–Kubo).** Im Gleichgewicht ($f = 0$) gilt

$$C_{vv}(t) := \langle v(t)\, v(0)\rangle_\star = \frac{k_BT}{m}\, e^{-(\gamma/m)t}, \qquad D = \int_0^\infty C_{vv}(t)\, dt = \frac{k_BT}{\gamma}.$$

3. **Einstein.** Damit folgt unmittelbar

$$D \;=\; \mu\, k_BT \;=\; \mu\, \beta^{-1}.$$

VIII.9.6 Randfälle: NESS & Frequenzabhängige Antwort

Abseits strikter Gleichgewichtslagen bleiben viele Strukturelemente erhalten (Kausalität, Green–Kubo-artige Integrale), aber Symmetrien und Identitäten werden *korrigiert*: Stationäre Ströme erzeugen zusätzliche Quellterme, und die einfache FDT-Identität muss durch NESS-Versionen ersetzt werden.[16, 35] Für Anwendungen ist das wichtig, weil reale Systeme häufig in stationären Nichtgleichgewichtslagen betrieben werden (Gradienten, Antriebe, aktive Bäder).

Außerhalb des Gleichgewichts

Außerhalb strikten Gleichgewichts bleiben *Kausalität* und viele *Strukturformeln* erhalten, aber die einfachen Gleichgewichtsidentitäten (FDT/Green–Kubo ohne Zusatzterme) werden im Allgemeinen korrigiert:

1. **NESS (stationäres Nichtgleichgewicht).** Für stationäre Nichtgleichgewichtszustände ersetzt $p^\star$ das Gleichgewichtsmaß. Green–Kubo-Relationen behalten typischerweise die Form „Korrelatorintegral“, erhalten jedoch *zusätzliche Quell-/Verletzungsterme* durch stationäre Ströme (bzw. Abweichung von der Gleichgewichts-FDT); vgl. auch die NESS-Pfadperspektive in **??**.
2. **Dynamische Antwort (Frequenzraum).** Formelkasten VIII.9.2.2 liefert den Zusammenhang zwischen Spektren und $\operatorname{Re}\tilde{\chi}_{\alpha\beta}(\omega)$ im Gleichgewicht. Aus *Kausalität* folgen unabhängig davon Kramers–Kronig-Relationen, die Real- und Imaginärteil von $\tilde{\chi}_{\alpha\beta}(\omega)$ verknüpfen.[36]

VIII.9.7 Checkliste & Einordnung

Die folgenden Punkte bündeln prüfbare Konsequenzen im linearen Regime. Sie sind bewusst so formuliert, dass sie als Datenchecks taugen: Korrelatorintegrale, Symmetrieprüfungen ($\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$) und Positivitätstests für L.

Pass/Fail – Transport im FBA

- **FDT:** $\chi_{\alpha\beta}(t) = \beta\,\vartheta(t)\,C_{\alpha\beta}(t)$ (Formelkasten VIII.9.2.1); Spektralform Formelkasten VIII.9.2.2.
- **Green–Kubo:** $L_{\alpha\beta} = \beta\int_0^\infty C_{\alpha\beta}(t)\,dt$ (Formelkasten VIII.9.3.1); $L \succeq 0$.
- **Onsager–Casimir:** $L_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) = \epsilon_\alpha\epsilon_\beta\,L_{\beta\alpha}(-\mathbf{B})$ (Lemma VIII.9.3.1).
- **Budget-Interpretation:** $\dot{\Sigma} = f^\top L f$ ist die lineare Dissipationsleistung (irreversibles internes Budget pro Zeit) im linearen Regime.

VIII.9.8 Ausblick

Die Green–Kubo-/FDT-Struktur knüpft Transportkoeffizienten unmittelbar an Budgetfluktuationen und macht Dissipation als „Korrelator-Observable“ zugänglich. Kapitel VIII.10 nutzt diese Beziehungen für Vorhersagen, Falsifizierbarkeit und Design von Messprotokollen

(u. a. Linearresponse-Tests & Skalengesetze; [42]).

[42] Siehe FBA Teil X: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA $\to$ QM $\leftrightarrow$ ART, Kap. X.2 (Linearresponse & Testgrößen).

VIII.10 Vergleich & Einordnung zum Standard

Dieses Kapitel ordnet die in den Kapiteln Kapitel VIII.3 bis Kapitel VIII.9 entwickelten Resultate in etablierte Rahmen (klassische Mechanik, Dekohärenz/semiklassischer Limes, stochastische Thermodynamik, lineare Antwort) ein und markiert präzise, wo der FBA *mehr* fordert (zusätzliche Monotonien/Schranken, beobachtbares „Altern") oder *weniger* voraussetzt (keine Postulate zur klassischen Welt). Für die formalen Ausgangsbausteine (CPTP/GKLS, DPI/Spohn, Komposition/Lokalität) siehe [43] sowie die Standardquellen [3, 5–7]. Zur Ausarbeitung von Messung/Dekohärenz/GKLS (inkl. detailed balance) vgl. [44] und [45]. Kurze Brücken zu den anderen Teilen der Reihe erlauben Kontext, ohne eine Verweis-Wüste zu erzeugen.

VIII.10.1 Brücken: Begriffskorrespondenzen

Als Einstieg genügt eine „Wörterbuch"-Ebene: Welche Objekte entsprechen welchen Standardbegriffen? Wichtig ist dabei: Die Zuordnung ist *operativ* gemeint (Mess- und Protokollsicht), nicht nur formal-symbolisch. Die folgenden Paarungen dienen deshalb zugleich als Hinweis, *wo* im Text die jeweilige Struktur hergeleitet wird.

FBA ↔ Standard (Auswahl)

- *Budget-Kalkül (intern/extern/irreversibel)* ↔ Arbeit/Wärme/Entropieflüsse (Clausius), stochastische Thermodynamik (Kapitel VIII.6; Formelkasten VIII.6.1.1) [16].
- *Pointer-Projektion* $\mathcal{R}$ ↔ Dekohärenz/POVM-Instrumente; klassischer Master-Limes (Kapitel VIII.3; Korollar VIII.3.2.1) [1, 2].
- *Master → FP/Langevin* ↔ Kramers–Moyal/Fokker–Planck/Itô–SDE (Kapitel VIII.4; Lemma VIII.4.2.1 und Formelkästen VIII.4.2.1 und VIII.4.3.1) [13–15, 37].
- *Reversibler Budgetanteil* ↔ Liouville-/Hamilton–Jacobi-Dynamik (Kapitel VIII.5; Formelkästen VIII.5.2.1 und VIII.5.2.2).
- *DPI/Spohn* ↔ H-Theorem/zweiter Hauptsatz (Kapitel VIII.6; Lemma VIII.6.2.1 und Korollar VIII.6.2.1) [3, 5].
- *Pfad-Budget/EP* ↔ Crooks/Jarzynski (stochastische Thermodynamik auf Pfadräumen) (Kapitel VIII.7; Formelkästen VIII.7.3.1 und VIII.7.4.1) [16, 21, 22].
- *Altern A* ↔ integrierter *irreversibler interner* Budgetanteil, isotherm über $\beta^{-1}\Sigma_{\text{int}}$ kalibriert und in Zeit via κ_τ übersetzt (Kapitel VIII.8; Formelkasten VIII.8.2.1).
- *Green–Kubo/FDT* ↔ lineare Antwort/Transportkoeffizienten (Kapitel VIII.9; Formelkästen VIII.9.2.1 und VIII.9.3.1) [28–33].

Diese Korrespondenzen erklären bereits, warum sich viele Resultate „vertraut" anfühlen:

[43] Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kap. I.5–I.6 „Zulässige Dynamik, DPI/Spohn, Komposition".

[44] Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Kap. III.3–III.5 „POVMs, Instrumente & Naimark".

[45] Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.4–IV.7 „Dekohärenz, Entropiefluss & stationäre Zustände".

Der FBA reproduziert Standardstrukturen, aber er motiviert sie über *zulässige Verarbeitung* (CPTP/GKLS) und *Monotonien* (DPI/Spohn) statt über separate klassische Postulate. Der nächste Schritt ist daher nicht ein weiterer „Abgleich“, sondern die klare Ansage, *wo* der FBA zusätzliche, testbare Struktur erzwingt.

VIII.10.2 Abgrenzung & Mehrwert gegenüber Standardansätzen

Die folgenden Punkte fassen zusammen, in welchem Sinn der FBA gegenüber Standarddarstellungen *stärker* ist (mehr Struktur/Schranken) und in welchem Sinn er *ökonomischer* ist (weniger Postulate). Dabei ist „Mehrwert“ hier nicht als neue Phänomenologie gemeint, sondern als: klarere Logikpfade, schärfere Bounds und zusätzliche beobachtbare Größen.

Mehrwert des FBA (knapp)

- **Deduktiver klassischer Limes:** Klassische Gleichungen entstehen aus CPTP/GKLS + $\mathcal{R}$ + Zeitskalen—ohne Zusatzpostulate (Kapitel VIII.3 und VIII.4) [1, 2].
- **Monotonien & No-Recovery:** DPI/Spohn liefert universelle Schranken für unselektierte Prozesse; selektive Eingriffe sind explizit ausgenommen (Kapitel VIII.6; Lemma VIII.6.2.1) [3–5]. Die Trennlinie „unselektiert vs. selektiv“ ist zentral; vgl. [a].
- **Budget-Interpretation von Fluktuationssätzen:** $\Sigma = \beta(W - \Delta F)$ verbindet Arbeitsschätzungen direkt mit *internem* irreversiblen Budget (Kapitel VIII.7; Formelkasten VIII.7.2.1) [16, 21, 22]; die Übersetzung in Alternzeit erfolgt via κ_τ (Formelkasten VIII.8.2.1).
- **Beobachtbare Alterung:** A trennt dissipative Lebensdauer von reiner Eigenzeit—eine Messgröße jenseits der Standardkinematik (Kapitel VIII.8; Lemma VIII.8.1.1 und Formelkasten VIII.8.2.1).
- **Transport als Budgetfluktuation:** FDT/Green–Kubo erscheinen als Positivitäts-/Symmetrieaussagen irreversibler Budgets (Kapitel VIII.9; Korollar VIII.9.4.1 und Lemma VIII.9.3.1) [28–33].

[a] Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Kap. III.4–III.5 „Instrumente & selektive Operationen“.

Die zentrale Trennlinie, die sich durch alle Punkte zieht, ist dieselbe wie in den vorherigen Kapiteln: *unselektiert zulässige Verarbeitung* (CPTP/GKLS, DPI/Spohn) erzeugt robuste Monotonien; alles, was diese Zulässigkeit verlässt (Postselektion/Feedback ohne Buchhaltung), kann lokale „Gegenbeispiele“ produzieren, zählt dann aber nicht als Kernverletzung, sondern als Protokollwechsel. Damit sind wir bei der Frage: *Welche* Aussagen sind die minimalen „Hauptschalter“ (Pass/Fail) dieser Abhandlung?

VIII.10.3 Konkrete, falsifizierbare Aussagen (diese Abhandlung)

Die nachstehenden Aussagen sind so formuliert, dass sie als minimale *Falsifikatoren* dienen: Sie verknüpfen eine klare Voraussetzung (pointerstabil, unselektiert, ldb, linearer Bereich) mit einem eindeutig testbaren Kriterium. Die vollständige, zusammenhängende Pass/Fail-Liste steht in Kapitel VIII.11; hier geht es um die wichtigsten „Hauptschalter“. Für die protokollseitige Operationalisierung (wie misst man J, W, Q, ΔF, A in minimal-invasiven Setups?) siehe insbesondere [46].

Formelkasten VIII.10.3.1: Testbare Kernaussagen

1. **Kontraktion nach Projektion:** Für pointerstabile $\mathcal{R}$ fällt $D(p_t \| p^\star)$ monoton (Lemma VIII.3.2.1) [3, 4]. *Fail*, wenn in einem verifiziert *unselektierten* Setup (und bei konsistenter Referenzwahl $p^\star$) reproduzierbar Markov-Margen mit $\dot{D} > 0$ beobachtet werden (jenseits kontrollierter $\mathcal{O}(\varepsilon)$-Schließungsfehler).

2. **Landauer im Budgetbild:** Reset um ΔI erfordert im isothermen Limes

$$A \;\geq\; \frac{\beta^{-1}}{\kappa_\tau}\,\Delta I$$

   (Korollar VIII.6.3.1 und Formelkasten VIII.8.2.1) [19, 20]. *Fail*, falls reproduzierbar $A < (\beta^{-1}/\kappa_\tau)\Delta I$ bei kontrollierter Temperaturkalibration und ohne versteckte Selektion/Feedback.

3. **Crooks-Schnittpunkt:** $P_F(W) = P_R(-W)$ bei $W = \Delta F$ (Kapitel VIII.7; Formelkasten VIII.7.3.1) [21, 22]. *Fail*, falls systematisch verschoben *bei erfüllter* ldb und korrekt implementierter Zeitumkehr (Protokollrücklauf).

4. **FDT/Green–Kubo-Positivität:** $L \succeq 0$, $\dot{\Sigma} = f^\top L f \geq 0$ (Kapitel VIII.9; Formelkästen VIII.9.2.1 und VIII.9.3.1 und Korollar VIII.9.4.1) [28–33]. *Fail*, wenn negative Eigenwerte von L *im linearen Bereich* und *bei Mikroreversibilität* auftreten (nicht nur numerisches/finite-size Artefakt).

5. **Trennung τ_{geo} vs. A:** Variation der Kinematik (Zeitdilatation) bei fester, lokal gleich realisierter interner GKLS-Kopplung ändert A nicht (Kapitel VIII.8; Lemma VIII.8.4.1). *Fail*, wenn A systematisch mit reiner Kinematik skaliert, ohne Änderung der internen Dissipationskanäle.

Man kann diese Liste auch als „Minimaldiagnostik“ lesen: (1)–(2) testen DPI/Spohn und Budget-/Temperaturkalibration im Thermolimes, (3) testet Pfadumkehr/Konsistenz von ldb, (4) testet die lineare Antwortstruktur als Korrelator-Observable, (5) testet die neue konzeptionelle Trennung zwischen geometrischer Zeit und dissipativem Altern. Als nächstes lohnt sich deshalb ein kurzer Blick auf die *Dokumentbrücken*: Welche Bausteine werden in anderen Teilen gekrümmt/gerenormt/weitergeführt?

VIII.10.4 Kurzbrücke FBA → QM ↔ ART

Die in dieser Abhandlung entwickelten Aussagen sind kinematisch/flach. Die strukturellen Brücken bleiben dennoch sichtbar, weil die verwendeten Bausteine (Kalibration, GKLS/DPI, Budgetflüsse) genau die sind, die in den anderen Teilen jeweils weitergeführt werden. [47] [48] [49]

[46] Siehe FBA Teil X: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA → QM ↔ ART, Kap. X.2 „Testgrößen & Protokolle“.
[47] Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, (i) Eigenzeitgeometrie als Minkowski-Limes.
[48] Siehe FBA Teil VI: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen, (ii) Geometrisierung von Budgetflüssen.
[49] Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, (iii) Kalibration/RG/Skalenfenster.

Brücken (knapp, mit Verweisen)

- **Eigenzeit/Minkowski:** τ_{geo} folgt aus dem reversiblen Budget (Minkowski-Quadrik/Lichtkegel/Lorentz-Limes), und Altern A addiert als irreversibler interner Anteil ([a]; [b]).
- **Geometrie aus Budgetflüssen:** In gekrümmten Situationen werden Budgetflüsse geometrisiert; diese Abhandlung liefert die flache Thermo-/Transportbasis ([c]).
- **Skalen/RG:** Normierungen (β, c, k_B) und Antwortskalen werden in Teil VII präzisiert—hier nur benutzt ([d]).

[a] Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Kap. II.4 „Eigenzeit & Altern".

[b] Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Kap. II.6–II.7 „Minkowski-Limes & Lorentz-Kinematik".

[c] Siehe FBA Teil VI: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen, Kap. VI.2–VI.4 „Budget–Geometrie".

[d] Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Kap. VII.1–VII.3 „Kalibration & Response-Skalen".

Diese Brücke ist auch ein Hinweis zur Interpretation: Wenn in Experiment/Simulation scheinbare Abweichungen auftreten, ist oft zuerst zu prüfen, ob eine Annahme dieser Abhandlung verletzt wurde (z. B. Selektivität, fehlende Zeitskalen-Separation, NESS statt Gleichgewicht) oder ob tatsächlich ein Kernkriterium (Monotonie/Bound) gebrochen ist. Daher schließen wir mit einem expliziten „Annahmenkasten" als Fehlersuchbaum.

VIII.10.5 Rahmenbedingungen & Geltungsbereich

Die Tragfähigkeit der Ergebnisse beruht auf klaren Voraussetzungen. Wir nennen sie hier explizit, weil sie zugleich die Standardquellen für „scheinbare Gegenbeispiele" markieren: Man verlässt (bewusst oder unbewusst) den Zulässigkeitsbereich, und dann ist eine Verletzung der Monotonien nicht überraschend.

Annahmen (explizit) & typische Bruchstellen

- **Pointerstabilität & Säkularlimes:** Off–Diagonalen relaxieren schneller als Beobachtungszeiten (Kapitel VIII.3); vgl. [a] und [1, 2].
- **Unselektierte GKLS-Dynamik:** Monotonien/Schranken gelten ohne Postselektion (Kapitel VIII.6 und VIII.7) [5–7]. Selektive Instrumente/Feedback sind ausdrücklich ausgenommen; vgl. [b].
- **Diffusiver Skalenlimes:** Für FP/Langevin (Kapitel VIII.4) sind endliche zweite Momente und kleine Sprünge nötig [13–15].
- **Linearer Antwortbereich:** FDT/Green–Kubo gelten nahe stationären Referenzen (Kapitel VIII.9), typischerweise unter Mikroreversibilität/detailed balance; vgl. [c] sowie [28–33].
- **Flacher/kinematischer Rahmen:** Keine Backreaction/Krümmung; für Gravitation siehe [d].

[a]Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.4–IV.6 „Dekohärenz, Säkularlimes & effektive Sprünge“.

[b]Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Kap. III.4–III.5 „Instrumente & selektive Operationen“.

[c]Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.7 „Stationäre Zustände & detailed balance“.

[d]Siehe FBA Teil VI: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen, Teil VI.

VIII.10.6 Einordnung & Ausblick

Die FBA-Perspektive bindet klassischen Limes, Thermodynamik und Transport an ein einziges Monotonieprinzip (DPI/Spohn) und an ein operatives Budget-Kalkül. Kapitel VIII.11 bündelt die Pass/Fail-Kriterien dieser Abhandlung und stellt eine kompakte Prüfliste für Peer-Review, Simulationen und Experimente bereit.

VIII.11 Zusammenfassung & Checkliste (Pass/Fail)

Dieses Kapitel bündelt die zentralen Aussagen der Abhandlung (Kapitel VIII.3 bis Kapitel VIII.10) und formuliert eine kompakte, operativ nutzbare Pass/Fail-Checkliste. Die hergeleiteten Bausteine liegen in: Dekohärenz/Pointer & Master-Limes (Kapitel VIII.3), Kramers–Moyal/FP/Langevin (Kapitel VIII.4), Ehrenfest/Hamilton-Limes (Kapitel VIII.5), Entropieproduktion/2. HS/Landauer (Kapitel VIII.6), Fluktuationssätze (Kapitel VIII.7), Altern (Kapitel VIII.8), Transport/FDT/Green–Kubo (Kapitel VIII.9), Einordnung (Kapitel VIII.10). Für messpraktische Protokolle/Design und Brückensätze siehe außerdem [50]. Die Kriterien sind so gewählt, dass sie sich auf direkt messbare Größen (Populations-/Stromdaten, Arbeit/Wärme, Korrelatoren) abbilden lassen und die in den vorigen Kapiteln hergeleiteten Monotonien, Relationen und Trennungen testen.

VIII.11.1 Kurzfazit der Abhandlung

Wir fassen zunächst die „Tragpfeiler“ zusammen, weil die Checkliste genau diese Strukturbausteine als Messkriterien operationalisiert: (1) Projektion/Schließung $\Rightarrow$ klassische Dynamik, (2) reversible vs. irreversible Anteile $\Rightarrow$ Trajektorien/EP, (3) Pfadniveau $\Rightarrow$ Crooks/Jarzynski, (4) neue beobachtbare Größe $\Rightarrow$ Altern, (5) lineare Antwort $\Rightarrow$ Transport als Korrelator-Observable.

Kernaussagen (kompakt)

- **Klassischer Limes:** pointerstabile Projektion $\mathcal{R}$ und Zeitskalen-Separation führen von GKLS zu einer autonomen Master-Gleichung (Korollar VIII.3.2.1); kontinuierlicher Limes ergibt Fokker–Planck/Langevin (Lemma VIII.4.2.1 und Formelkästen VIII.4.2.1 und VIII.4.3.1).
- **Reversible Dynamik:** Der reversible Budgetanteil erzeugt Liouville-/Hamilton–Jacobi-Struktur und effektive Trajektorien (Formelkästen VIII.5.2.1 und VIII.5.2.2 und Lemma VIII.5.3.1).
- **Zweiter Hauptsatz:** Entropieproduktion $\dot{\Sigma} \geq 0$ aus Spohn/DPI und Clausius-Bilanz (Lemma VIII.6.2.1, Formelkasten VIII.6.1.1, und Korollar VIII.6.2.1); Landauer-Bound im Budgetbild (Korollar VIII.6.3.1).
- **Fluktuationssätze:** IFT, Crooks und Jarzynski verbinden Pfad-EP mit Arbeit/Freier Energie (Lemma VIII.7.2.1 und Formelkästen VIII.7.2.1, VIII.7.3.1 und VIII.7.4.1).
- **Altern A:** integrierter *irreversibler interner* Budgetfluss, operativ kalibrierbar über EP (Definition VIII.8.1.1, Formelkasten VIII.8.2.1, und Lemma VIII.8.4.1).
- **Transport:** FDT/Green–Kubo, Positivität und Onsager–Casimir als Eigenschaften irreversibler Budgets (Formelkästen VIII.9.2.1, VIII.9.2.2 und VIII.9.3.1, Lemma VIII.9.3.1, und Korollar VIII.9.4.1).

[50] Siehe FBA Teil X: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA $\rightarrow$ QM $\leftrightarrow$ ART, Kap. X.1–X.3 „Messprogramme, Protokolle & Checklisten“.

VIII.11.2 Pass/Fail-Checkliste (operativ)

Die Checkliste organisiert prüfbare Aussagen nach Messkanälen. „Pass“ bedeutet: Messdaten liegen innerhalb des angegebenen Toleranzbandes; „Fail“: systematischer, reproduzierbarer Verstoß jenseits der Unsicherheiten. Wichtig ist dabei die Protokollgrenze: Monotonien/Bounds gelten für *unselektierte* Flüsse (kein Postselection-/Feedback-Trick), und Pfadrelationssätze (Crooks/Jarzynski) setzen Mikroreversibilität/ldb sowie konsistente Temperaturkalibration voraus. Zur Trennung selektiv/unselektiv und Instrumenten siehe [51]; zur detailed-balance-Struktur im GKLS-Rahmen [52]; zur Temperatur-/Einheitenkalibration [53].

Formelkasten VIII.11.2.1: Prüfkatalog mit Zielgrößen & Toleranzen (I)

(A) Projektion & Master-Dynamik. *Zielgröße:* Monotonie der klassischen Relativen Entropie $D(p_t \| p^\star)$. *Kriterium:* $\Delta D/\Delta t \le \delta_A$ auf unselektierten Datentraces (Lemma VIII.3.2.1 und Korollar VIII.3.2.1). *Pass:* Anteil positiver Steigungen $< z_A$ (Ausreißerquote). *Fail:* signifikante positive Trends (nicht nur Messrauschen/$\mathcal{O}(\varepsilon)$-Schließungsfehler).

(B) FP/Langevin-Limes. *Zielgröße:* Positivsemidefinitheit der Diffusion $D(x,t)$ aus Datenrekonstruktion. *Kriterium:* alle empirischen Eigenwerte $\lambda_i(D) \ge -\delta_D$ (Lemma VIII.4.2.1 und Formelkasten VIII.4.2.1). *Pass:* $\max_i[-\min(0,\lambda_i)] \le \delta_D$. *Fail:* robuste Negativität über Fenster/Bootstrap hinweg.

(C) Zweiter Hauptsatz & Landauer/Altern. *Zielgröße:* $\dot{\Sigma} \ge 0$ (unselektiert) und Landauer-Schranke im Alternmaß. *Kriterium:* zeitintegrierte $\Sigma \ge -\delta_\Sigma$ (Lemma VIII.6.2.1 und Korollar VIII.6.2.1); Reset-Kampagnen:

$$A - \frac{\beta^{-1}}{\kappa_\tau}\Delta I \;\ge\; -\delta_{\text{Lan}} \qquad (Korollar\ VIII.6.3.1 und Formelkasten\ VIII.8.2.1).$$

Pass: beide Schranken erfüllt. *Fail:* reproduzierbare Verletzung bei kontrollierter Kalibration (β, κ_τ) und unselektiertem Setup.

[51] Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Kap. III.4–III.5 „Instrumente & selektive Operationen“.

[52] Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kap. IV.7 „Stationäre Zustände & detailed balance“.

[53] Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Kap. VII.1–VII.2 „Kalibration & thermische Skalen“.

Formelkasten VIII.11.2.2: Prüfkatalog mit Zielgrößen & Toleranzen (II)

(D) Fluktuationssätze. *Zielgröße:* Crooks-Symmetrie und Jarzynski-Moment. *Kriterium:* $\log \frac{P_F(W)}{P_R(-W)}$ vs. W linear mit Steigung β und Schnitt bei $W = \Delta F$ (Formelkasten VIII.7.3.1); $\langle e^{-\beta W}\rangle = e^{-\beta \Delta F}$ innerhalb δ_J (Formelkasten VIII.7.4.1). *Pass:* beide erfüllt. *Fail:* systematische Abweichung *bei erfüllter* Mikroreversibilität/ldb (Zeitumkehr-Protokoll korrekt).

(E) Altern vs. Eigenzeit. *Zielgröße:* Trennung A von τ_{geo}. *Kriterium:* Vergleichsuhren-Protokolle liefern $\Delta A \neq 0$ bei konstanter τ_{geo} und umgekehrt (Lemma VIII.8.4.1 und Abschnitt VIII.8.5). *Pass:* erwartete Trennung sichtbar. *Fail:* A skaliert primär mit Kinematik (bei unveränderter interner Dissipation).

(F) Transport/Antwort. *Zielgröße:* $L = \beta \int_0^\infty C\,dt$ positiv semidef.; Onsager–Casimir-Symmetrie. *Kriterium:* $\text{mineig}(L) \geq -\delta_{\text{pos}}$ (Formelkasten VIII.9.3.1 und Korollar VIII.9.4.1); $L_{\alpha\beta}(\mathbf{B}) \approx \epsilon_\alpha \epsilon_\beta L_{\beta\alpha}(-\mathbf{B})$ innerhalb δ_O (Lemma VIII.9.3.1). *Pass:* beide erfüllt. *Fail:* robuste Verletzung (nicht nur finite-size/finite-window Artefakt).

VIII.11.3 Messgrößen, Datenerhebung & Auswertung

Damit die Checkliste tatsächlich „plug-in“ ist, sammeln wir hier je Prüfpunkt die minimal benötigten Observablen. Die Idee ist: Jeder Block ist (i) über eine Standardmessung zugänglich und (ii) über eine Standard-Auswertung in ein Pass/Fail-Kriterium übersetzbar (mit Bootstrap-/Fensterchecks zur Robustheit).

Minimaler Datensatz je Prüfpunkt

- **(A)** Zeitserien p_t, geschätztes $p^\star$, Relative-Entropie-Pfad $D(p_t \| p^\star)$.
- **(B)** Drift/Diffusions-Rekonstruktion aus kurzen Lag-Δt-Inkrementen; Eigenwertprüfung von $D(x,t)$.
- **(C)** $\dot{S}_{\text{sys}}$, Wärmeflüsse $\dot{Q}_\alpha$, $\dot{\Sigma}$; Reset-Experimente mit ΔI sowie Kalibration β und κ_τ.
- **(D)** Arbeitssamples W für Vorwärts/Rückwärtsprotokolle; ΔF aus Zustandsgleichung oder unabhängiger Referenzmessung.
- **(E)** Vergleichsuhren-Traces: τ_{geo} (Kinematik) und intern bilanziertes $\dot{\Sigma}_{\text{int}}$ zur Bestimmung von A (Formelkasten VIII.8.2.1).
- **(F)** Gleichgewichts-Korrelatoren $C_{\alpha\beta}(t)$; Antwortfunktionen $\chi_{\alpha\beta}(t)$; ggf. **B**-abhängige Messung.

Auswertung & Unsicherheiten

- **Relative Entropie $D(p_t \| p^\star)$:** empfindlich bei seltenen Zuständen/$p \approx 0$; Regularisierung (Floor/Kappen kleinster p) und Bootstrap-Intervalle empfohlen.
- **Diffusion/Drift (FP-Rekonstruktion):** kurze Lags Δt, Drift-Abzug, lokale Quadratik; Fensterwahl und Stabilität über Δt-Variation prüfen.
- **Jarzynski ($\langle e^{-\beta W}\rangle$):** exponentielles Reweighting $\Rightarrow$ varianzempfindlich; Varianzreduktion via Bennett-Akzeptanzratio/Stratifizierung (vgl. **??**).
- **Transport (Green–Kubo):** Fensterauswahl für $\int_0^\infty C(t)\,dt$, Tail-Fits/Abklingmodelle; außerhalb des Gleichgewichts zusätzliche Quellterme/stationäre Ströme berücksichtigen.

VIII.11.4 Fail-Analyse & Diagnostik

Ein „Fail" ist informativ nur, wenn man ihn sauber dem richtigen Grund zuordnet: (i) Annahmen/Protokolle verletzt, (ii) Rekonstruktion/Auswertung instabil, oder (iii) tatsächlicher Strukturbruch. Die folgende Heuristik ist als schneller Diagnosebaum gedacht (zuerst Protokoll/Annahmen, dann Auswertung, dann Interpretation).

Typische Ursachen für „Fail" (Heuristik)

(A) **Verletzte Pointerstabilität/Sektorschließung:** $\Rightarrow$ $\{\Pi_x\}$ verfeinern, größere τ_{dec}-Lücke sicherstellen, unselektierte Datenerhebung prüfen.

(B) **Nichtdiffusiver Limes (fette Sprünge):** $\Rightarrow$ Sprungterme 3. und höherer Ordnung modellieren statt FP; ggf. auf Master-Ebene bleiben.

(C) **Selektive/feedback-getriebene Protokolle:** $\Rightarrow$ Monotonien gelten nur unselektiert (Lemma VIII.6.2.1); Instrumente/Selektion explizit bilanzieren (Protokollwechsel).

(D) **ldb verletzt (Nichtisothermie, Mehrbäder, zu schnelles Driving):** $\Rightarrow$ NESS-/Mehrbäder-Formen verwenden (vgl. Kapitel VIII.7 und **??**).

(E) **Falsche Kalibration β oder κ_τ, inkonsistente ΔF-Referenz:** $\Rightarrow$ thermische Skalen, Zeitkalibration und Referenzmessung prüfen; vgl. [a].

(F) **Transport: endliche Fenster/Finite-Size-Effekte:** $\Rightarrow$ Tail-Fits, Block-Bootstrap, $\mathbf{B} \to -\mathbf{B}$-Symmetrie getrennt testen (vgl. Kapitel VIII.9).

[a] Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Kap. VII.1–VII.2 „thermische Skalen".

VIII.11.5 Schlussbemerkung

Die Checkliste ist modular: Jeder Prüfpunkt steht für sich und kann unabhängig verifiziert werden. Zusammen bilden sie eine kohärente empirische Validierung des FBA-Bildes im klassischen Limes – von der Projektion über Thermodynamik/Fluktuationen bis zur Alterung und zum Transport. Die Umsetzung in konkreten Plattformen (Quantenoptik, Festkörper, weiche Materie) sowie Protokolldesign und Skalengesetze werden in *Teil X* vertieft; vgl. [54] für konkrete Messpfade und robuste Schätzer.

[54]Siehe FBA Teil X: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA $\to$ QM $\leftrightarrow$ ART, Kap. X.2 „Testgrößen & Protokolle“.

VIII.12 Anhang: Überblick über die FBA-Reihe (Teile I–X)

Klick auf den Titel zum Download des PDF

1. ***Teil I*: FBA-Grundlagen: Abfolge, Budget, Eigenzeit & Pfeile.** *Ziel:* Basisschicht bereitstellen: Abfolge, Budget, Eigenzeit/Alterung, Front und operativer Zeitpfeil (DPI); Minkowski-Limes aus der Budget-Quadrik; zulässige Dynamik und Lokalität/No-Signalling. *Import:* – (Referenz für alle Folgeteile). *Erweiterung:* Schnittstellenverträge, Pass/Fail-Checklisten, Lesefaden.
2. ***Teil II*: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie.** *Ziel:* Eigenzeit/Quadrik operativ fassen und Geodäten ableiten. *Import:* Grundlagen (Abfolge, Budget, Eigenzeit, Front/DPI). *Erweiterung:* glatter Limes, Variationsprinzip auf Weltlinien, Kalibration κ_τ.
3. ***Teil III*: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle.** *Ziel:* Zustandsräume und Kanäle (CPTP) samt Komposition. *Import:* Grundlagen (Budget, Kanalsicht, Komposition). *Erweiterung:* konkrete Divergenzen/Kostenfunktoren $\mathcal{C}$, Messungen und Klassik-Register.
4. ***Teil IV*: Dynamik, Messung & GKLS (offene Systeme).** *Ziel:* Kontinuierliche offene Dynamik (GKLS) und operativer Zeitpfeil. *Import:* Kanäle/DPI. *Erweiterung:* Spohn-Monotonie, stationäre/NESS-Referenzen, Flüsse $b^{\mathrm{rev}}, b^{\mathrm{irr}}, b^{\mathrm{ext}}$.
5. ***Teil V*: Raumzeit, Lichtkegel & lokale Feldtheorie.** *Ziel:* Lokale Feldgleichungen unter Front/Lokalität. *Import:* Front, Komposition, No-Signalling. *Erweiterung:* lokale GKLS-Generatoren, Lieb–Robinson-artige Schranken, effektive Lichtkegel.
6. ***Teil VI*: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen.** *Ziel:* Geometrisierung von Budgetflüssen. *Import:* Budget-Quadrik/Eigenzeit. *Erweiterung:* effektive Metriken aus Kalibrationen (κ_t, κ_x) und internen Spannungen; Kopplung an Krümmung.
7. ***Teil VII*: Konstanten, Skalen & Renormierung.** *Ziel:* Skalenführung der Kalibrationssätze. *Import:* $c = \kappa_t/\kappa_x$, κ_τ. *Erweiterung:* Flow-Gleichungen für $\kappa_t, \kappa_x, \kappa_\tau$; Stabilität von c.
8. ***Teil VIII*: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern.** *Ziel:* Makroskopik aus $A[\gamma]$ (Alterung) und DPI. *Import:* Eigenzeit/Alterung, Spohn. *Erweiterung:* Entropieproduktion, Euler–Lagrange-Formen für irreversible Flüsse, effektive Transportgleichungen.
9. ***Teil IX*: Kosmische Dynamik, Time Dilation & Inflation (TDI).** *Ziel:* Kosmische Abfolge & Kalibrationsfluss. *Import:* Budget, Eigenzeit/Front. *Erweiterung:* Budgetgleichungen auf großskaligen Slices; Time-Dilation-Inflation als Kalibrationsdynamik.
10. ***Teil X*: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA → QM ↔ ART.** *Ziel:* Testbare Differenzen und Brücken FBA ↔ QM/ART. *Import:* alle Grundlagenbausteine. *Erweiterung:* Protokolle, Grenzfalltests, überbestimmte Konsistenzrelationen (Pass/Fail).

Alle Teile der FBA-Reihe sind in deutscher und englischer Sprache verfügbar unter

https://www.frame-budget-approach.eu

Literatur

[1] W. H. Zurek. „Decoherence, einselection, and the quantum origins of the classical“. In: *Reviews of Modern Physics* 75.3 (2003), S. 715–775. DOI: 10.1103/RevModPhys.75.715. arXiv: quant-ph/0105127.

[2] M. Schlosshauer. *Decoherence and the Quantum-to-Classical Transition.* Berlin: Springer, 2007. ISBN: 978-3-540-35773-5.

[3] G. Lindblad. „Completely Positive Maps and Entropy Inequalities“. In: *Communications in Mathematical Physics* 40.2 (1975), S. 147–151. DOI: 10.1007/BF01609396.

[4] D. Petz. „Sufficient Subalgebras and the Relative Entropy of States of a von Neumann Algebra“. In: *Communications in Mathematical Physics* 105.1 (1986), S. 123–131. DOI: 10.1007/BF01212345.

[5] H. Spohn. „Entropy Production for Quantum Dynamical Semigroups“. In: *Journal of Mathematical Physics* 19.5 (1978), S. 1227–1230. DOI: 10.1063/1.523789.

[6] V. Gorini, A. Kossakowski und E. C. G. Sudarshan. „Completely Positive Dynamical Semigroups of N-Level Systems“. In: *Journal of Mathematical Physics* 17.5 (1976), S. 821–825. DOI: 10.1063/1.522979.

[7] G. Lindblad. „On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups“. In: *Communications in Mathematical Physics* 48.2 (1976), S. 119–130. DOI: 10.1007/BF01608499.

[8] H.-P. Breuer und F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems.* Oxford: Oxford University Press, 2002. ISBN: 9780199213900.

[9] A. S. Holevo. *Quantum Systems, Channels, Information. A Mathematical Introduction.* Berlin, Boston: De Gruyter, 2012. DOI: 10.1515/9783110273403.

[10] M. A. Nielsen und I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information. 10th Anniversary Edition.* Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN: 9781107002173.

[11] M. Born. „Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge“. In: *Zeitschrift für Physik* 37 (1926), S. 863–867.

[12] E. B. Davies und J. T. Lewis. „An Operational Approach to Quantum Probability“. In: *Communications in Mathematical Physics* 17 (1970), S. 239–260. DOI: 10.1007/BF01647093.

[13] H. Risken. *The Fokker–Planck Equation: Methods of Solution and Applications.* 2. Aufl. Berlin: Springer, 1996. DOI: 10.1007/978-3-642-61544-3.

[14] C. W. Gardiner. *Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences.* 4. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. ISBN: 9783540707127.

[15] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry.* 3. Aufl. Amsterdam: Elsevier, 2007. DOI: 10.1016/B978-0-444-52965-7.X5000-4.

[16] U. Seifert. „Stochastic thermodynamics, fluctuation theorems and molecular machines“. In: *Reports on Progress in Physics* 75.12 (2012), S. 126001. DOI: 10.1088/0034-4885/75/12/126001.

[17] G. E. Uhlenbeck und L. S. Ornstein. „On the Theory of the Brownian Motion“. In: *Physical Review* 36.5 (1930), S. 823–841. DOI: 10.1103/PhysRev.36.823.

[18] J. von Neumann. *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Bd. 38. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin: Springer, 1932.

[19] R. Landauer. „Irreversibility and Heat Generation in the Computing Process“. In: *IBM Journal of Research and Development* 5.3 (1961), S. 183–191. DOI: 10.1147/rd.53.0183.

[20] C. H. Bennett. „The Thermodynamics of Computation—A Review“. In: *International Journal of Theoretical Physics* 21.12 (1982), S. 905–940. DOI: 10.1007/BF02084158.

[21] G. E. Crooks. „Entropy production fluctuation theorem and the nonequilibrium work relation for free energy differences“. In: *Physical Review E* 60.3 (1999), S. 2721–2726. DOI: 10.1103/PhysRevE.60.2721.

[22] C. Jarzynski. „Nonequilibrium Equality for Free Energy Differences“. In: *Physical Review Letters* 78.14 (1997), S. 2690–2693. DOI: 10.1103/PhysRevLett.78.2690.

[23] U. Seifert. „Entropy Production along a Stochastic Trajectory and an Integral Fluctuation Theorem“. In: *Physical Review Letters* 95 (2005), S. 040602. DOI: 10.1103/PhysRevLett.95.040602.

[24] T. Hatano und S.-i. Sasa. „Steady-State Thermodynamics of Langevin Systems“. In: *Physical Review Letters* 86.16 (2001), S. 3463–3466. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.3463.

[25] C. H. Bennett. „Efficient estimation of free energy differences from Monte Carlo data“. In: *Journal of Computational Physics* 22.2 (1976), S. 245–268. DOI: 10.1016/0021-9991(76)90078-4.

[26] J. Schnakenberg. „Network theory of microscopic and macroscopic behavior of master equation systems“. In: *Reviews of Modern Physics* 48.4 (1976), S. 571–585. DOI: 10.1103/RevModPhys.48.571.

[27] J. L. Lebowitz und H. Spohn. „A Gallavotti–Cohen-Type Symmetry in the Large Deviation Functional for Stochastic Dynamics“. In: *Journal of Statistical Physics* 95.1-2 (1999), S. 333–365. DOI: 10.1023/A:1004589714161.

[28] R. Kubo. „Statistical-Mechanical Theory of Irreversible Processes. I. General Theory and Simple Applications to Magnetic and Conduction Problems“. In: *Journal of the Physical Society of Japan* 12.6 (1957), S. 570–586. DOI: 10.1143/JPSJ.12.570.

[29] H. B. Callen und T. A. Welton. „Irreversibility and Generalized Noise“. In: *Physical Review* 83.1 (1951), S. 34–40. DOI: 10.1103/PhysRev.83.34.

[30] M. S. Green. „Markoff Random Processes and the Statistical Mechanics of Time-Dependent Phenomena. II. Irreversible Processes in Fluids“. In: *The Journal of Chemical Physics* 22.3 (1954), S. 398–413. DOI: 10.1063/1.1740082.

[31] L. Onsager. „Reciprocal Relations in Irreversible Processes. I.“ In: *Physical Review* 37.4 (1931), S. 405–426. DOI: 10.1103/PhysRev.37.405.

[32] L. Onsager. „Reciprocal Relations in Irreversible Processes. II.“ In: *Physical Review* 38.12 (1931), S. 2265–2279. DOI: 10.1103/PhysRev.38.2265.

[33] H. B. G. Casimir. „On Onsager's Principle of Microscopic Reversibility“. In: *Reviews of Modern Physics* 17.2-3 (1945), S. 343–350. DOI: 10.1103/RevModPhys.17.343.

[34] A. Einstein. „Zur Elektrodynamik bewegter Körper“. In: *Annalen der Physik* 322.10 (1905), S. 891–921. DOI: 10.1002/andp.19053221004.

[35] T. Hatano und S.-i. Sasa. „Steady-State Thermodynamics of Langevin Systems“. In: *Physical Review Letters* 86.16 (2001), S. 3463–3466. DOI: 10.1103/PhysRevLett.86.3463.

[36] J. S. Toll. „Causality and the Dispersion Relation: Logical Foundations“. In: *Physical Review* 104.6 (1956), S. 1760–1770. DOI: 10.1103/PhysRev.104.1760.

[37] J. E. Moyal. „Quantum Mechanics as a Statistical Theory“. In: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 45 (1949), S. 99–124. DOI: 10.1017/S0305004100000487.