

Der Frame–Budget–Ansatz (FBA)
Wie Zeit, Dynamik und Geometrie aus Budgetflüssen entstehen
Eine operative Brücke zwischen Quantenmechanik und Allgemeiner Relativitätstheorie

Teil V: Raumzeit, Lichtkegel & lokale Feldtheorie

Dipl. Wirt.-Inf. Jens Tetzner

21. Januar 2026

Inhaltsverzeichnis

V	Raumzeit, Lichtkegel & lokale Feldtheorie	2
V.1	Einleitung & Zielbild	2
V.2	Vorangestellte Grundlagen & Konventionen (Import aus Teil I: FBA - Grundlagen)	5
V.3	Raumzeit als emergente Struktur aus FBA	8
V.4	Lichtkegel als Kausalstruktur	10
V.5	Mikrokausalität und Netze lokaler Feldalgebren	13
V.6	FBA und lokale relativistische QFT	18
V.7	Zusammenfassung und Ausblick	21
V.8	Anhang: Überblick über die FBA-Reihe (Teile I–X)	23

Teil V

Raumzeit, Lichtkegel & lokale Feldtheorie

V.1 Einleitung & Zielbild

V.1.1 Motivation

Teil II hat gezeigt, wie im FBA¹ aus Abfolge, Bilanz und Front-Kalibration im flachen Referenzlimes homogener Budgets eine Lichtkegelstruktur als operative Kausalreferenz entsteht.² Teil III und Teil IV haben die kinematische Operator-Sprache und die zulässige Dynamik so fixiert, dass *offene* Quantensysteme als CPTP- bzw. GKLS-Prozesse behandelt werden können.³ Was bisher fehlt, ist der Schritt, der beide Stränge operativ zusammenführt: Wie wird aus einer global formulierten Prozessbeschreibung eine *lokale* Struktur, in der Operationen räumlich unterstützt sind, Signale nur innerhalb der Kegel laufen und Feldalgebren als Netze über Regionen organisiert werden? Genau diese lokale Übersetzung ist die Aufgabe dieser Abhandlung.

V.1.2 Logikpfad

Wir bauen die lokale QFT-Struktur als *systematische Übersetzung* bereits fixierter FBA-Primitiven auf:

1. **Abfolge:** Minimalereignisse liefern eine update-stabile Ordnung globaler Frames.⁴
2. **Budget:** Pro Update gilt eine Bilanz, die interne, externe und irreversible Anteile trennt.⁵
3. **Kalibration:** Signalfronten fixieren die maximale Steigung c metrologisch (nicht als Postulat).⁶
4. **Kegelstruktur (Referenz):** Im flachen Referenzlimes identifiziert die Budget-Quadrik ihre Nullrichtungen als Fronten und damit eine operative Kausalreferenz.⁷
5. **Prozesslokalität:** Komposition und No-Signalling klassifizieren zulässige Operationen nach Unterstützung (lokal vs. disjunkt), ohne globale Inkonsistenzen einzuführen.⁸
6. **Feldstruktur (lokale Organisation):** Aus lokal unterstützten Operationen *unter* Kegelrestriktion formulieren wir den algebraischen Kern als Konsistenzstruktur: ein Netz lokaler Algebren über Regionen, Mikrokausalität als Bedingung bei raumartiger

¹Ein Überblick über alle Teile der FBA-Abhandlung inklusive Downloadlinks findet sich in Kapitel V.8 dieses Dokuments.

²Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.3–II.6 „Zeit aus Differenz, Kalibration & Budget-Quadrik“.

³Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.3–IV.5 „CPTP-Zulässigkeit, Messung als Instrument & GKLS“.

⁴Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.2 „Primitive & Axiome des FBA“.

⁵Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.3 „Budget-Kalkül pro Schritt“.

⁶Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.3 „Kalibration und Frontkosten“.

⁷Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.7 „Front, Quadrik & Lichtkegel“.

⁸Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6 „Komposition, Lokalität & No-Signalling“.

Trennung, und eine kegelkompatible (lokal generierte) Dynamik im GKLS-Limes. Die operative Pointe ist dabei: „Feld“ ist die konsistente Lokalisierung zulässiger Operationen *unter* der bereits fixierten Kausalordnung.

Warum diese Reihenfolge? Ohne (3) ist c nur Konvention und die Kegelordnung nicht operational fixiert. Ohne (4) fehlt die belastbare Unterscheidung „kausal erreichbar“ vs. „raumartig getrennt“. Und ohne (5) bleibt „lokal“ eine geometrische Vokabel ohne dynamischen Gehalt, weil unklar ist, welche Prozessschritte als lokal zulässig gelten. Erst dann wird (6) zur konsistenten Formulierung der QFT-Struktur im FBA: als algebraische Organisation von Lokalität unter Kegelrestriktion.

V.1.3 Scope und Abgrenzung

Wir arbeiten im *flachen, kinematischen* Referenzlimes: keine Krümmung, keine Backreaction, lokale Inertialsprache als Arbeitskoordinaten. Zulässige Dynamik ist CPTP-konform und im Markov-Limes GKLS-konform; Lokalität wird über Komposition, Nebenregister und Coarse-Graining präzisiert.⁹ Gravitation als Abweichung vom homogenen Limes wird erst in Teil VI aus Budget-Gradienten hergeleitet.¹⁰ Skalenfragen und Renormierung, die für Feldtheorie unvermeidlich sind, werden in Teil VII eigenständig gebündelt.¹¹

V.1.4 Beitrag gegenüber Standard-QFT

Standard-QFT startet typischerweise mit einer vorgegebenen Raumzeit und postuliert dann Mikrokausalität und lokale Felder als Strukturprinzipien. Im FBA werden diese Bausteine in zwei Schritten entkoppelt und dann konsistent zusammengeführt: Die Kegelstruktur ist bereits als Budget-Limes kalibriert (nicht postuliert), und die zulässige Dynamik ist als CPTP/GKLS unter Komposition stabil (nicht frei wählbar). Damit wird *Mikrokausalität* als Kompatibilitätsbedingung zwischen lokal unterstützter Dynamik und Kegelordnung lesbar, und *lokale Felder* erscheinen als algebraische Repräsentation dieser Kompatibilität. Der zusätzliche Gewinn ist operativ: weil Messung und offene Dynamik von Anfang an als Kanäle behandelt werden, lassen sich Abweichungen von idealer Lokalität als Protokollkosten oder als Verletzungen der Zulässigkeitsannahmen formulieren, statt als Interpretationsfrage.

V.1.5 Lesefaden

Die Kapitelreihenfolge ist so gewählt, dass wir (i) die Referenzbegriffe „lokal“ und „kausal“ sauber fixieren, (ii) die bereits etablierte Raumzeit- und Kegelordnung als Referenzkausalität in Regionalbegriffe und Unterstützung übersetzen, und (iii) erst dann die lokale QFT-Struktur (Netze, Mikrokausalität, lokale Dynamik) als konsistente Organisationsform formulieren.

Kapitel V.2 - Grundlagen & Konventionen: Import der benötigten Bausteine und Fixierung der Notation. *Warum zuerst?* Damit „Region“, „lokal unterstützt“ und „raumartig“ später nicht still undefiniert werden, sondern auf denselben Referenzannahmen (Bilanz, Front, Quadrik, Komposition) beruhen.

⁹Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.2–IV.5 „Zulässigkeit, Instrumente & GKLS“.

¹⁰Siehe FBA Teil VI: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen, Abschnitte VI.1–VI.4 „Geometrie/Gravitation aus Budgetflüssen“.

¹¹Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Abschnitte VII.2–VII.4 „Kalibration/Skalen & RG-Flüsse“.

Kapitel V.3 - Raumzeit als emergente Struktur: Übersetzung der globalen Update-Ordnung (Minimalereignisse) in eine operative Raumzeit-Sprache. *Warum hier?* Erst wenn „Region“ als Teilstruktur der Update-/Bilanzlogik verstanden ist, kann „lokal“ mehr sein als Metapher.

Kapitel V.4 - Lichtkegel als Kausalstruktur: Rekapitulation der Kegelordnung als Referenzkausalität aus Quadrik und Front-Kalibration und ihre Verwendung zur Operationalisierung von „raumartig“ vs. „kausal erreichbar“. *Warum danach?* Weil Mikrokausalität und lokale Dynamik eine klare Bedeutung von „raumartig getrennt“ benötigen.

Kapitel V.5 - Mikrokausalität & Netze lokaler Algebren: Algebraische Lokalität (Mikrokausalität) als Konsistenzbedingung aus Komposition/No-Signalling *unter* Kegelrestriktion; Aufbau des Haag–Kastler-Kerns und kegelkompatibler lokaler Dynamik. *Warum hier?* Weil „Feld“ im FBA genau die konsistente Lokalisierung zulässiger Operationen *unter* dieser Kausalordnung ist.

Kapitel V.6 - FBA und lokale relativistische QFT: Einordnung der gewonnenen Struktur in den Standardrahmen lokaler relativistischer QFT (Symmetrien, Erhaltungssätze, klassischer Limes). *Warum jetzt?* Erst nachdem der lokale Kern steht, macht der Vergleich „gleiche Vorhersage – andere Ableitung“ wirklich transparent.

Kapitel V.7 - Zusammenfassung & Ausblick: Verdichtung der Resultate, Passagen zu Skalen/RG und Backreaction/Gravitation, sowie Übersetzung in testbare Protokolle. *Ziel:* Der Übergang zu den nächsten Teilen soll als Anschluss an klar benannte Strukturelemente erfolgen (Kegelordnung, Netze, lokale Generatoren).

V.2 Vorangestellte Grundlagen & Konventionen (Import aus Teil I: FBA - Grundlagen)

Warum ein Import? In Teil V wollen wir *lokale* Struktur nicht als zusätzliches Axiom einführen, sondern als systematische Übersetzung bereits fixierter Bausteine: (1) Abfolge und Bilanz liefern die Update-Struktur; (2) Kalibration und Quadrik liefern die Kegelordnung als Referenzkausalität; (3) CPTP/GKLS unter Komposition liefert die zulässige Dynamikklasse, die unter Nebenregistern und Coarse-Graining stabil bleibt. Wenn diese drei Punkte stehen, ist „lokales Feld“ keine freie Wahl mehr, sondern die algebraische Formulierung davon, welche Operationen mit Kegelordnung und No-Signalling verträglich sind. Damit die Argumentlinie hier nicht in Wiederholungen zerfällt, übernehmen wir die Primitiven aus Teil I unverändert.¹² Die Herleitung der Kegelstruktur selbst wird als Referenz aus Teil II benutzt und hier nicht neu durchgeführt.¹³

Lesefaden-Hinweis. Teil V setzt voraus, dass „kausal“ bereits operational fixiert ist (Front-Kalibration, Quadrik) und dass „zulässig“ als Prozessklasse präzisiert wurde (CPTP/GKLS, Instrumente).¹⁴ Das Neue hier ist die lokale Übersetzung: Wir machen präzise, wie man aus diesen Vorgaben Regionen, Kausalkomplemente und Netze von Algebren definiert, so dass Mikrokausalität als Konsistenzbedingung sichtbar und operativ prüfbar wird.

¹²Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitte I.2–I.6 „Abfolge, Budget, Kalibration, Komposition & Zulässigkeit“.

¹³Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.7 „Front, Quadrik & Lichtkegel“.

¹⁴Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.2–IV.5 „Zulässigkeit, Messung als Instrument & GKLS“.

Importierte Bausteine (unverändert)

- **Abfolge globaler Zustände & Minimalereignisse:** Frame-Abfolge, Minimalereignis sowie Koaktualität und Refinement-Invarianz.^a
- **Differenzfunktion & operative Minimaldifferenz:** Operatives Differenzmaß als Grundlage refinement-stabiler Ordnungen.^b
- **Budget-Kalkül (intern/extern/irreversibel) & Bilanz:** Ein-Schritt-Budget, Bilanzgleichungen und Refinement-Invarianz.^c
- **Externe Kalibration & Front:** Kalibration, Frontschränke und Signalfront als Referenzstruktur für c .^d
- **Eigenzeit & Altern, Minkowski-Limes:** Eigenzeit, Alterung, Minkowski-Limes und Zeitdilatation als flacher Referenzlimes.^e
- **Zulässige Dynamik (CPTP/GKLS), DPI/Spohn:** CPTP, Kraus/Stinespring, Messung als CPTP, GKLS-Generatoren, Spohn-Monotonie, Semigroup-Budget, DPI-Pfeil und No-Recovery.^f
- **Komposition, Lokalität & No-Signalling:** Symmetrisch-monoidale Struktur, Budget-Additivität, No-Wire-Inflation und lokale Operationen, Kausalkegel und lokale GKLS.^g

^aSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.2.

^bSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.2.

^cSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.3.

^dSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.3.

^eSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.4.

^fSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5.

^gSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6.

Wozu genau dienen diese Importe in Teil V? Die Punkte oben fixieren die beiden Dinge, die wir für eine lokale Feldstruktur zwingend brauchen: eine *Referenzkausalität* (Kegel aus Quadrik/Front) und eine *stabile Prozessklasse* (CPTP/GKLS unter Komposition). Erst dann ist sinnvoll formulierbar, was es heißt, dass eine Operation „nur in einer Region“ wirkt, und warum raumartig getrennte Operationen sich nicht gegenseitig beeinflussen dürfen.

Notation & Konventionen

- **Diskret vs. Kontinuum:** Schritindex $n \in \mathbb{Z}$ für aufeinanderfolgende Frames; $\Delta(\cdot)$ für diskrete Inkremente, $d(\cdot)$ für differentielle Größen im Limes.
- **Budget-Zerlegung (Referenz):** Pro Schritt $\delta b_{\text{int}}, \delta b_{\text{ext}}, \delta b_{\text{irr}}$ (intern/extern/irreversibel). *Alterung* $dA \equiv db_{\text{irr}} \geq 0$. *Geometrische Eigenzeit* $d\tau_{\text{geo}} \equiv db_{\text{int}}^{\text{ev}}$. *Totale Eigenzeit* $d\tau_{\text{tot}} = d\tau_{\text{geo}} + dA$.
- **Kalibration und Kegelreferenz:** c bleibt explizit (keine $c = 1$ -Einheiten). Wir verwenden Koordinaten $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$ und die flache Referenz-Quadrik

$$ds^2 = -c^2 dt^2 + d\mathbf{x}^2.$$

Äquivalent, in $x^0 \equiv ct$, gilt $ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ mit $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Diese Minkowski-Notation ist hier *Referenzsprache*; ihre Rechtfertigung als flacher Referenzlimes folgt aus Teil II.^a Der Lichtkegel ist durch $ds^2 = 0$ gegeben.

- **Raumzeitregionen und Kausalhüllen:** Raumzeitpunkte p, q ; Regionen $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{1,3} \cong \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. Kausale Zukunft/Vergangenheit $J^\pm(\mathcal{O})$, kausaler Abschluss $J(\mathcal{O}) = J^+(\mathcal{O}) \cup J^-(\mathcal{O})$. Raumartiges Komplement \mathcal{O}^\perp (alle Punkte, die zu *allen* Punkten in \mathcal{O} raumartig getrennt sind).
- **Lokale Algebren und lokale Operationen:** $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ bezeichnet die (z. B. C^* - oder von-Neumann-) $*$ Algebra der Observablen, die in \mathcal{O} lokalisiert sind. Der Kommutator für Observablen ist $[A, B] = AB - BA$. Mikrokausalität wird später als $[A, B] = 0$ für $A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1), B \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ mit $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2^\perp$ formuliert. Separat bezeichnen wir mit $\text{Chan}(\mathcal{O})$ die Klasse zulässiger (CPTP-)Operationen, die in \mathcal{O} unterstützt sind (präzise Definition folgt im lokalen Dynamik-/Netz-Kapitel).
- **Felder und Smearing (falls operatorwertig):** Symbolische Ausdrücke wie $\phi(x)$ sind (wo verwendet) als Kurzform für gesmeartes $\phi(f)$ mit Testfunktionen $f \in C_c^\infty(\mathcal{O})$ zu lesen. Aussagen wie Mikrokausalität werden dann support-basiert (raumartig getrennte Träger), nicht punktweise, formuliert.
- **Kanäle und Bilder:** CPTP-Kanäle Φ im Schrödinger-Bild: $\rho \mapsto \Phi(\rho)$. Adjungiertes Heisenberg-Bild Φ^* mit $\text{Tr}(\Phi(\rho)E) = \text{Tr}(\rho \Phi^*(E))$.
- **Komposition/Lokalität:** Parallele Komposition \otimes ; serielle Komposition \circ . Lokale CPTP-Operationen respektieren No-Signalling und Budget-Additivität.^b
- **Zeichenkonventionen:** Vektornormen $\|\cdot\|$; euklidische Skalarprodukte „ \cdot “ im Raum. Erwartungswerte $\mathbb{E}[\cdot]$; Supremum \sup .

^aSiehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt II.6 „Budget-Quadrik & Minkowski-Limes“.

^bSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6 „Komposition, No-Wire-Inflation & lokale Operationen“.

Konsequenz. Mit diesen Importen und Konventionen können wir in den folgenden Kapiteln die Kegelordnung als operative Kausalstruktur nutzen, „lokale Unterstützung“ von Operationen präzisieren und daraus Netze lokaler Algebren samt Mikrokausalität und lokaler Dynamik konsistent *formulieren und ausarbeiten* – ohne versteckte Notationswechsel oder implizite Zusatzpostulate.

V.3 Raumzeit als emergente Struktur aus FBA

Bis hierhin sind zwei Dinge bereits fest verankert: Erstens gibt es eine update-stabile Ordnung globaler Frames durch Minimalereignisse.¹⁵ Zweitens steht im flachen Referenzlimes eine operational kalibrierte Kegelstruktur als Referenz zur Verfügung (Fronten fixieren c , und die Budget-Quadrik bestimmt die Nullrichtungen).¹⁶ Was noch fehlt, ist die Übersetzung dieser globalen Struktur in eine Sprache, in der „Region“, „lokal unterstützt“ und „kausal erreichbar“ nicht nur geometrische Metaphern sind, sondern Aussagen darüber, welche Operationen miteinander verträglich sind. Genau diese Übersetzung brauchen wir, um in den folgenden Kapiteln lokale Feldalgebren als Netze über Regionen zu definieren.

V.3.1 Übersetzung der Raumzeit-Referenzstruktur aus Abfolge, Bilanz und Kalibration

Minimalereignisse liefern nicht nur eine Reihenfolge, sondern eine operative Vorstellung davon, wann zwei globale Frames „benachbart“ sind: Sie unterscheiden sich minimal im Sinne der Differenzfunktion.¹⁷ Die Budgetbilanz macht diese Nachbarschaft kompatibel mit einem konsistenten Ressourcenfluss pro Update.¹⁸ Und die Kalibration über Signalfronten liefert schließlich eine metrologische Fixierung der maximalen Ausbreitungsrate c , so dass aus „schnellstmöglich“ eine reproduzierbare Schranke wird.¹⁹ Die eigentliche Kegel-/Quadrikstruktur wird dabei als Resultat aus Teil II *als Referenz* übernommen; hier übersetzen wir sie in Begriffe, die später Regionalität und Unterstützung von Operationen tragen.²⁰

V.3.2 Zugang zur Raumzeit über Minimalereignisse und Kegelordnung

Die in Teil II eingeführte Zeitskala ist eine streng wachsende Einbettung der Frame-Abfolge, deren Einheit erst durch die Front-Kalibration festgelegt wird.²¹ Auf der diskreten Ebene bedeutet das: Ein Übergang $F_n \rightarrow F_{n+1}$ ist ein elementarer Update-Schritt, und Kausalbeziehungen zwischen solchen Schritten werden dadurch kontrolliert, ob eine Verbindung innerhalb der Frontschränke realisierbar ist. Im Kontinuums-limes der Verfeinerung rekapitulieren wir diese Referenzkausalität als Kegelordnung der Minkowski-Kurznotation, wobei die Minkowski-Sprache ausdrücklich nur Kurzform für den bereits hergeleiteten Referenzlimes ist.²² Diese Reihenfolge ist entscheidend: Erst die Kalibration macht aus der Abfolge eine vergleichbare Raumzeitstruktur, so dass „außerhalb des Kegels“ eine operational belastbare Aussage wird.

¹⁵Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.2 „Globale Zustände, Frame-Folge und Minimalereignis (ME)“.

¹⁶Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.7 „Kalibration, Budget-Quadrik & Minkowski-Limes“.

¹⁷Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.2 „Differenzfunktion & operative Minimaldifferenz“.

¹⁸Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.3 „Ein-Schritt-Budget & Bilanzgleichungen“.

¹⁹Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.3 „Kalibration und Frontkosten“.

²⁰Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.7 „Kalibration, Budget-Quadrik & Minkowski-Limes“.

²¹Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt II.3 „Zeit aus Abfolge minimaler Unterschiede“.

²²Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt II.6 „Budget-Quadrik und Minkowski-Limes“.

V.3.3 Raumzeit-Patches als lokale Teilstrukturen

Lokale Raumzeitregionen oder Patches verstehen wir als durch Kausalbeziehungen verbundene Teilabfolgen der globalen Updates. Damit „lokal“ mehr ist als ein geometrischer Name, muss diese Patch-Bildung mit der zulässigen Prozessklasse verträglich sein: Operationen auf disjunkten Trägern dürfen sich nicht gegenseitig beeinflussen (No-Signalling), und die Dynamik muss unter Nebenregistern und Coarse-Graining stabil bleiben.²³ Genau hier greifen die in Teil IV fixierten Prozessprinzipien: Zulässige lokale Updates sind CPTP, und im Markov-Limes entstehen lokal unterstützte GKLS-Flüsse.²⁴ Ein Patch ist damit keine isolierte Entität, sondern ein Ausschnitt der globalen Buchführung, dessen interne Dynamik die gleichen Schließungsregeln respektiert wie die Theorie insgesamt.

V.3.4 Zwischenfazit und Übergang zu lokalen Feldern

Im FBA entsteht Raumzeit als emergente Referenzstruktur aus (i) der Abfolge minimaler Unterschiede, (ii) der Budgetbilanz pro Update und (iii) der Front-Kalibration, die c metrologisch fixiert.²⁵ Lokale Patches sind die Teilstrukturen dieser globalen Ordnung, die mit Komposition, No-Signalling und zulässiger Dynamik verträglich sind. Damit ist die Bühne bereitet, in den folgenden Kapiteln „lokale Felder“ als Netze von Algebren über Regionen zu definieren, deren Mikrokausalität nicht als Zusatzpostulat, sondern als Konsistenzbedingung von Kegelordnung und Prozessklasse sichtbar wird.

²³Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6 „Komposition, Lokalität & No-Signalling“.

²⁴Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.3–IV.5 „Zulässige Prozesse, Messung als Instrument & GKLS“.

²⁵Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.7 „Kalibration, Quadrik & Kegelstruktur“.

V.4 Lichtkegel als Kausalstruktur

V.4.1 Nullstruktur der Budget-Quadrik: Der Lichtkegel ist keine Zusatzannahme

Wie in Teil II hergeleitet, wird die operative Kausalstruktur im FBA im *flachen Referenzlimes* durch die *Budget-Quadrik* fixiert: Aus Bilanz, Refinement und Front-Kalibration ergibt sich ein quadratisches Linienelement, dessen Nullrichtungen die Signalfrenten beschreiben und dessen kontinuierlicher Limes in Minkowski-Form geschrieben werden kann.²⁶ Wichtig ist dabei die Statusaussage: Die Minkowski-Schreibweise ist hier *Kurznotation* für diesen Referenzlimes, kein zusätzliches Postulat.

Formelkasten V.4.1.1: Lichtkegel aus Quadrik und Front-Kalibration

Im flachen, kinematischen Referenzlimes schreiben wir für kalibrierte Inkremente $dx^\mu = (dt, d\mathbf{x})$ das Linienelement als

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + \|d\mathbf{x}\|^2.$$

Die Nullstruktur

$$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0 \quad \iff \quad \|d\mathbf{x}\| = c |dt|$$

kennzeichnet die *Lichtkegelrichtungen* und wird von Signalfrenten saturiert. Für zukunftsgerichtete Inkremente ($dt > 0$) ist dies äquivalent zu $\|d\mathbf{x}\|/dt = c$.^{a b}

^aSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.3 „Kalibration und Frontkosten“.

^bSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.3 „Frontschränke/Signalfrent“.

V.4.2 Kausale Ordnung als Referenzbegriff für „lokal“, „raumartig“ und „erreichbar“

Da c im FBA metrologisch über Fronten fixiert wird, ist „innerhalb/außerhalb des Kegels“ keine freie Konvention, sondern die operative Referenzaussage, relativ zu der wir „kausal erreichbar“ und „raumartig getrennt“ definieren (vgl. Notation & Konventionen in Kapitel V.2).

²⁶Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt II.6 „Budget-Quadrik und Minkowski-Limes“.

Definition V.4.2.1: Kausale Ordnung aus dem Lichtkegel

Wir verwenden die Koordinaten (t, \mathbf{x}) und damit die Signatur $\eta = \text{diag}(-c^2, 1, 1, 1)$ für $dx^\mu = (dt, d\mathbf{x})$. Eine stückweise glatte Kurve γ heißt *kausal*, wenn ihr Tangentialvektor überall zeit- oder lichtartig ist: $\eta_{\mu\nu}\dot{\gamma}^\mu\dot{\gamma}^\nu \leq 0$. Sie heißt *zukunftsgerichtet*, wenn entlang der Parametrisierung $dt/d\lambda \geq 0$ gilt. Dann definieren wir für eine Region $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^{1,3}$:

$$J^+(\mathcal{O}) = \{q \mid \exists p \in \mathcal{O} \text{ und eine zukunftsgerichtete kausale Kurve von } p \text{ nach } q\},$$

$$J^-(\mathcal{O}) = \{q \mid \exists p \in \mathcal{O} \text{ und eine vergangengerichtete kausale Kurve von } p \text{ nach } q\},$$

$$J(\mathcal{O}) = J^+(\mathcal{O}) \cup J^-(\mathcal{O}).$$

Das *raumartige Komplement* ist

$$\mathcal{O}^\perp = \mathbb{R}^{1,3} \setminus J(\mathcal{O}),$$

also die Menge aller Punkte, die zu *allen* Punkten in \mathcal{O} raumartig getrennt sind. ^a

^aSiehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt II.6 „Budget-Quadrik und Minkowski-Limes“.

V.4.3 Signalbegrenzung: Frontschränke als operative Form von „innerhalb des Kegels“

Die Lichtkegelstruktur ist im FBA nicht nur „Geometriesprache“, sondern die direkte Übersetzung einer Kalibrations- und Zulässigkeitsaussage: Ein *realisierbares* Signal respektiert die durch Fronten fixierte Schranke.

Lemma V.4.3.1: Signalbegrenzung als Frontschränke

Unter korrekter Front-Kalibration gilt für jede realisierte Informationsübertragung (Signal) zwischen räumlich getrennten Ereignissen mit $\Delta t > 0$:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{x}\|}{\Delta t} \leq c,$$

und Gleichheit tritt nur im Grenzfall der Signalfronten auf.^a Damit ist die Lichtkegelstruktur die operative Übersetzung der Front-Zulässigkeit: „Signal zulässig“ impliziert „innerhalb des Kegels“.

^aSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Lemma/Korollar I.3 „Frontschränke/Signalfront“.

V.4.4 Einordnung zur Speziellen Relativität: gleiche flache Vorhersagen, andere Ableitungslogik

In der Speziellen Relativität wird die Minkowski-Struktur typischerweise als kinematischer Ausgangspunkt formuliert.[1, 2] Im FBA erscheint dieselbe Struktur als *Grenzform* eines aus Bilanz, Kalibration und Refinement gewonnenen Invariantenbegriffs: Die Quadrik liefert die Kegel (Nullrichtungen), die Fronten fixieren c , und die Lorentz-Gruppe ist die Symmetrie-

gruppe dieser Quadrik im flachen Referenzlimes.^{27 28} Der Unterschied liegt damit nicht in den flachen Vorhersagen, sondern in der *Ableitungslogik*: Kausalität ist im FBA eine Konsequenz aus Budget-Zulässigkeit und metrologischer Kalibration, nicht ein unabhängiges Postulat.

²⁷Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt II.6 „Budget-Quadrik und Minkowski-Limes“.

²⁸Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt II.10 „Vergleich & Einordnung zur Speziellen Relativität“.

V.5 Mikrokausalität und Netze lokaler Feldalgebren

Aus *Komposition/Lokalität* und *No-Signalling* (Import) sowie dem flachen Referenzlimes (Budget-Quadrik \Rightarrow Lichtkegel) steht eine operative Kausalstruktur als Referenz zur Verfügung.^{29 30 31} Darauf aufbauend formulieren wir (i) Mikrokausalität als algebraische Unabhängigkeit bei raumartiger Trennung, (ii) ein lokales Netz $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$ von C^* -Algebren (Haag-Kastler-Sprache), [3, 4] und (iii) die Kegelkompatibilität lokal erzeugter (GKLS-)Dynamik als explizite Kompatibilitätsforderung.³² Zustände/Effekte stammen aus der Kinematik.³³

Hinweis zur Sprache. $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ ist die *Algebra lokal zugänglicher Observablen/Effekte* in der Region \mathcal{O} . *Operationen* in \mathcal{O} werden dagegen als CP-Maps im Heisenberg-Bild beschrieben, die auf \mathcal{A} wirken (z. B. als $\Phi_{\mathcal{O}}^*$). Unselektierte Dynamik (CPTP im Schrödinger-Bild) entspricht CP-*unitalen* Maps im Heisenberg-Bild; selektive Instrument-Zweige sind i. A. CP-*subunital* (die Summe ist unital). Diese Unterscheidung verhindert eine Kategorienverwechslung.

Schritt 1: Wir fixieren den *algebraischen* Inhalt von „raumartig getrennt beeinflusst sich nicht“: Mikrokausalität ist die Bedingung, unter der die Reihenfolge raumartig getrennter lokaler Interventionen keinerlei beobachtbaren Unterschied macht.[4]

Formelkasten V.5.1: Mikrokausalität (algebraische Fassung)

Seien $\mathcal{O}_1, \mathcal{O}_2 \subset \mathbb{R}^{1,3}$ offene, beschränkte Regionen mit raumartiger Trennung $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2^\perp$ (Definition über die Referenzkausalität/Lichtkegelordnung).^a Dann lautet *bosonische Lokalität*:

$$[A, B] = 0 \quad \forall A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1), \forall B \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2).$$

Für \mathbb{Z}_2 -*gradierte* (fermionische) Sektoren mit Parität $|\cdot| \in \{0, 1\}$ gilt *gradierte Lokalität*:

$$[A, B]_{\text{gr}} \equiv AB - (-1)^{|A||B|}BA = 0, \quad A \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1), B \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2).$$

Insbesondere antikommutieren odd-odd-Operatoren bei raumartiger Trennung: $\{A, B\} = 0$ für $|A| = |B| = 1$.

^aSiehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt II.6 „Budget-Quadrik und Minkowski-Limes“.

Lesart. Formelkasten V.5.1 ist hier nicht als „zusätzliches Feldaxiom“ gemeint, sondern als *Minimalform* operativer Unabhängigkeit: Wenn Interventionen in \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 wirklich keine gegenseitige Beeinflussung erlauben, dann darf auch die „Reihenfolge“ ihrer Implementierung nicht messbar werden. Wichtig ist dabei die Trennlinie: *No-Signalling* allein ist eine Marginalaussage; für Mikrokausalität braucht man die stärkere Forderung *Reihenfolge-*

²⁹Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6 „Symmetrisch-monoidale Struktur, No-Wire-Inflation & lokale Operationen“.

³⁰Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt II.6 „Budget-Quadrik und Minkowski-Limes“.

³¹Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt II.7 „Relativität & Lorentz-Symmetrien aus der Quadrik“.

³²Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.3–IV.5 „Zulässige Prozesse, Messinstrumente & GKLS“.

³³Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Abschnitte III.3–III.5 „Zustände, POVMs & Operator-Sprache“.

Unbeobachtbarkeit raumartig getrennter Interventionen.

Warum hier zusätzliche operative Annahmen auftauchen. Damit aus „Reihenfolge ist unbeobachtbar“ wirklich eine *Algebra-Aussage* wie $[A, B] = 0$ folgt, muss die Theorie lokal „reichhaltig“ genug sein: Wenn ein Observable/Effekt lokal zugänglich ist, sollte er (zumindest infinitesimal) auch als reversible lokale Intervention nutzbar sein. Ohne diese minimale Kontrollannahme könnte es mathematisch nichtkommutierende Kandidaten geben, die aber operativ nie als Order-Signatur sichtbar werden.

Lemma V.5.1: Reihenfolge-Unbeobachtbarkeit (unter operativer Vollständigkeit) \Rightarrow Mikrokausalität (Operator-Darstellung)

Angenommen:

- (i) Lokale Interventionen in disjunkten Trägern sind unter Parallelkomposition wohldefiniert und budget-additiv (symmetrisch-monoidale Struktur).^a
- (ii) Raumartig getrennte Regionen erfüllen No-Signalling (keine Änderung beobachtbarer Marginalen) als Basiskonsistenz.^b
- (iii) **Operative Reihenfolge-Unbeobachtbarkeit:** Für *jede* Wahl lokaler Interventionen in \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 sind alle *unselektierten* beobachtbaren Statistiken invariant unter Vertauschung der Implementierungsreihenfolge (keine messbare „Order-Signatur“).
- (iv) **Operative Separierung (Standarddarstellung):** Die Menge lokal zugänglicher Zustände/Effekte separiert den lokal relevanten Teil der Algebra/Map-Wirkungen: Gleichheit aller Erwartungswerte für alle lokal zugänglichen Tests impliziert Gleichheit der betreffenden Algebraelemente/Maps (keine „unsichtbaren“ Unterschiede im physikalisch relevanten Teil von $\mathcal{A}(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$).^c
- (v) **Operative Vollständigkeit (lokale reversible Kontrolle):** Für jede Region \mathcal{O} sind hinreichend kleine reversible „Kicks“ aus $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ lokal realisierbar: Zu jedem selbstadjungierten $a \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ und hinreichend kleinem ε gibt es eine unselektierte, lokal in \mathcal{O} implementierbare Intervention, deren Heisenberg-Wirkung (ggf. approximativ) die innere Automorphie

$$A \mapsto e^{i\varepsilon a} A e^{-i\varepsilon a}$$

realisiert (und analog im \mathbb{Z}_2 -gradierten Fall gradierungskompatibel).

Dann folgt in einer Standard-Operator-Darstellung, dass die lokalen Algebren bei raumartiger Trennung (bosonisch bzw. gradiert) lokal sind, d. h. sie erfüllen Formelkasten V.5.1.^d

^aSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6 „Symmetrisch-monoidale Struktur“.

^bSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6 „No-Wire-Inflation & Kausalkegel & lokale GKLS“.

^cSiehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Abschnitte III.3–III.5 „Operator-Sprache, Zustände & Tests“.

^dSiehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Abschnitte III.3–III.5 „Operator-Darstellung & Heisenberg-Bild“.

Die in Teil I, Teil III und Teil IV etablierten Strukturresultate (Komposition, Nebenregister, Stinespring/Kraus, Instrumente) liefern den technischen Unterbau; hier geht es um die Idee, *welcher* operative Sachverhalt Mikrokausalität motiviert: die Nicht-Beobachtbarkeit der Reihenfolge.^{34 35 36} Die nächste Box fasst diese „Idea-Chain“ kompakt zusammen.

Beweisskizze V.5.1: Idea-Chain

(1) Reihenfolge-Unbeobachtbarkeit \Rightarrow kommutierende Heisenberg-Wirkungen (auf beobachtbaren Tests). Für lokal unterstützte *unselektierte* Interventionen (CPTP im Schrödinger-Bild) $\Phi_{\mathcal{O}_1}, \Phi_{\mathcal{O}_2}$ wirken die adjungierten Maps $\Phi_{\mathcal{O}_i}^*$ CP-unital auf \mathcal{A} . Annahme (iii) bedeutet: Für alle lokal zugänglichen Tests C (insb. $C \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)$) und alle zulässigen Zustände ρ sind die Erwartungswerte invariant unter Vertauschung,

$$\mathrm{Tr}(\rho \Phi_{\mathcal{O}_1}^*(\Phi_{\mathcal{O}_2}^*(C))) = \mathrm{Tr}(\rho \Phi_{\mathcal{O}_2}^*(\Phi_{\mathcal{O}_1}^*(C))).$$

Mit (iv) (Separierung) wird daraus die Gleichheit der Wirkungen auf dem physikalisch relevanten Teil:

$$\Phi_{\mathcal{O}_1}^* \circ \Phi_{\mathcal{O}_2}^* = \Phi_{\mathcal{O}_2}^* \circ \Phi_{\mathcal{O}_1}^* \quad (\text{auf dem lokal zugänglichen Teil von } \mathcal{A}(\mathcal{O}_1 \cup \mathcal{O}_2)).$$

(2) Nichtkommutativität \Rightarrow Order-Signatur (Kontradiktion zu (iii)). Nehmen wir zum Widerspruch an, es gäbe $A = A^\dagger \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ und $B = B^\dagger \in \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ mit $[A, B] \neq 0$.

Nach (v) sind für kleines ε die lokalen reversiblen „Kicks“ $\mathrm{Ad}_{e^{-i\varepsilon A}}$ in \mathcal{O}_1 und $\mathrm{Ad}_{e^{-i\varepsilon B}}$ in \mathcal{O}_2 als unselektierte Interventionen zulässig (Heisenberg-Bild: Konjugation).

Dann ist die zusammengesetzte Wirkung im Allgemeinen ordnungsabhängig:

$$\mathrm{Ad}_{e^{-i\varepsilon A}} \circ \mathrm{Ad}_{e^{-i\varepsilon B}} \neq \mathrm{Ad}_{e^{-i\varepsilon B}} \circ \mathrm{Ad}_{e^{-i\varepsilon A}} \quad \text{falls } [A, B] \neq 0,$$

und (bei geeigneter Wahl eines lokal zugänglichen Tests C) entsteht eine messbare Order-Signatur in Erwartungswerten/Statistiken. Das widerspricht (iii). Also muss $[A, B] = 0$ gelten (bzw. im fermionischen Fall der gradierte Kommutator verschwinden).

(3) Fermionische Sektoren. Bei \mathbb{Z}_2 -Gradierung wird „Vertauschbarkeit“ durch den gradierten Kommutator ersetzt; odd–odd-Operatoren antikommutieren, ohne dass operative Konsistenz verletzt wird (CAR-Struktur als konsistente Realisierung).

Schritt 2: Mikrokausalität ist damit als *lokale Unabhängigkeit* fixiert. Um daraus eine Feldtheorie-Sprache zu gewinnen, brauchen wir eine systematische Organisation: Welche Observablen gehören zu welcher Region? Das leistet ein *Netz* $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$, das lokale Zugriffsmöglichkeiten als Algebra-Zuordnung kodiert.

³⁴Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitte I.5–I.6 „Nebenregister/Komposition“.

³⁵Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Abschnitte III.3–III.5 „Kraus/Stinespring, Instrumente“.

³⁶Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.3–IV.4 „Zulässigkeit & Instrumente“.

Definition V.5.1: Netz lokaler C*-Algebren (Haag–Kastler–Kern)

Eine Zuordnung $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O}) \subset \mathcal{A}$ heißt *lokales Netz*. [3, 4] Wenn gilt:

- *Isotonie*: $\mathcal{O}_1 \subseteq \mathcal{O}_2 \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1) \subseteq \mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$.
- (*Gradierte*) *Lokalität*: $\mathcal{O}_1 \subset \mathcal{O}_2^\perp \Rightarrow \mathcal{A}(\mathcal{O}_1)$ und $\mathcal{A}(\mathcal{O}_2)$ erfüllen Formelkasten V.5.1.
- *Kovarianz (Minkowski-Referenzlimes; zusätzliche Annahme)*: Es existiert eine Darstellung $U(\Lambda, a)$ der Poincaré-Gruppe mit $U(\Lambda, a) \mathcal{A}(\mathcal{O}) U(\Lambda, a)^\dagger = \mathcal{A}(\Lambda\mathcal{O} + a)$.^a
- *Time-Slice (zusätzliche Annahme)*: Sei Σ eine Cauchy-Fläche und $D(\Sigma)$ ihre kausale Entwicklung (domain of dependence). Für jede relativ kompakte Nachbarschaft $N(\Sigma)$ von Σ gilt

$$\mathcal{A}(N(\Sigma)) = \mathcal{A}(D(\Sigma)).$$

Operativer Anschluss über Kausalkegel und lokale Generatoren.^b[4]

^aSiehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitt II.7 „Relativität & Lorentz-Symmetrien aus der Quadrik“.

^bSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6 „Kausalkegel & lokale GKLS“.

Schritt 3: Ein Netz allein ist noch kinematisch. Damit es „dynamisch“ wird, müssen offene Flüsse (GKLS) so wirken, dass Lokalisation nicht zerstört wird: lokal unterstützte Generatoren dürfen keine Effekte außerhalb des kausalen Abschlusses erzeugen. Genau diese Kegelkompatibilität formulieren wir nun im Heisenberg-Bild als Kompatibilitätsforderung.

Formelkasten V.5.2: Lokale GKLS-Dynamik auf dem Netz (Heisenberg-Bild)

Im flachen, kinematischen Limes beschreiben unselektierte offene Dynamiken formal eine CP-unital Halbgruppe $\{\alpha_t\}_{t \geq 0}$ auf \mathcal{A} (Heisenberg-Bild) mit Generator \mathcal{L}^* in GKLS-Form: [5–7]

$$\frac{d}{dt} \alpha_t(A) = \mathcal{L}^*(\alpha_t(A)), \quad \mathcal{L}^*(A) = i[H, A] + \sum_{\ell} \left(L_{\ell}^{\dagger} A L_{\ell} - \frac{1}{2} \{L_{\ell}^{\dagger} L_{\ell}, A\} \right).$$

Als *Kegelkompatibilität (Lokalisationsanforderung)* fordern wir: Wenn die Generator-Daten zu einer Region \mathcal{O} lokalisiert sind (z. B. $H \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ und $L_{\ell} \in \mathcal{A}(\mathcal{O})$ für alle ℓ), dann gilt für alle $t \geq 0$

$$\alpha_t(\mathcal{A}(\mathcal{O})) \subseteq \mathcal{A}(J(\mathcal{O})),$$

wobei $J(\mathcal{O})$ der kausale Abschluss ist.^{a b}

^aSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6 „Kausalkegel & lokale GKLS“.

^bSiehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitt IV.5 „GKLS-Gleichung“.

Ergebnisstatus. Mit Definition V.5.1 und Formelkasten V.5.2 ist die lokale Operator-Sprache als konsistenter Rahmen formuliert, der (i) die Kegelordnung als Referenzkausalität und (ii) die Prozessklasse (CPTP/GKLS) als Zulässigkeitskern zusammenführt. Das ist genau der

Punkt, an dem man die übliche lokale QFT-Struktur *als Organisationsform* (nicht als bloßes Postulat) wiedererkennt.

Korollar V.5.1: Einbettung in den lokalen QFT-Rahmen (kinematischer Kern)

Die Struktur aus Definition V.5.1 liefert Isotonie und (gradierte) Lokalität; zusammen mit den zusätzlichen Annahmen „Kovarianz“ und „Time-Slice“ entspricht dies dem üblichen Haag–Kastler-Kern.[3, 4]

Spektrums-, Vakuum- und Renormierungsannahmen sind dynamische Zusätze und werden auf spätere Teile (Skalen/RG, Backreaction) vertagt.

Anmerkung V.5.1: Fermionische Sektoren & Gradierung

Für fermionische Felder wird Lokalität durch den \mathbb{Z}_2 -gradierten Kommutator in Formelkasten V.5.1 implementiert. Die Argumentlinie bleibt unverändert, sobald lokale Interventionen (Kanäle/Instrumente) die Gradierung respektieren (z. B. lokale Paritätsselektion als Superselection).

Einordnung. (i) Mikrokausalität erscheint hier als operative Form der Nicht-Beobachtbarkeit der Reihenfolge raumartig getrennter Interventionen.^{37 38} (ii) Das Netz $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$ ist der Träger, auf dem Zustände/POVMs und zulässige Dynamik (CPTP/GKLS) gleichzeitig formuliert werden können.^{39 40} (iii) Damit steht der kinematische Kern lokaler relativistischer QFT im FBA als *emergente* Struktur: eine konsistente Organisation lokaler Zugriffsmöglichkeiten, stabil unter Komposition, Coarse-Graining und Kegelordnung.

³⁷Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6 „Komposition/Lokalität/No-Signalling“.

³⁸Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.6–II.7 „Quadrik & Lorentz“.

³⁹Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Abschnitte III.3–III.5 „Zustände & POVMs“.

⁴⁰Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.3–IV.5 „Zulässige Prozesse & GKLS“.

V.6 FBA und lokale relativistische QFT

Bis hierhin haben wir den *kinematischen Kern* lokaler relativistischer Feldtheorie im FBA-Formalismus sichtbar gemacht: Lichtkegel als Referenzkausalität aus Quadrik/Front (Kapitel V.4), Mikrokausalität als operative Form von *Reihenfolge-Unbeobachtbarkeit* raumartig getrennter Interventionen (in einer Standard-Operator-Darstellung; Kapitel V.5), und daraus ein Netz lokaler Algebren $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$, ergänzt um die im Standardrahmen üblichen (*zusätzlichen*) Kovarianz- und Time-Slice-Annahmen (Kapitel V.5).[4] ⁴¹⁴²

Dieses Kapitel erklärt nun, wie genau diese Struktur als *lokale relativistische QFT* gelesen wird: nicht als neues Postulat, sondern als *Identifikation* der bereits gewonnenen Netze/Flüsse mit dem Standardrahmen (*Haag-Kastler* / algebraisch), und welche *Zusatzannahmen* (Zustandswahl, Spektrum, Vakuum, Regularität, ggf. Symmetriemplementierung) erst den *dynamischen* Inhalt festnageln.

Arbeitsprinzip. Wir trennen konsequent (i) den *kinematischen Kern* (Netz, Lokalität, Kovarianz, Time-Slice) von (ii) *dynamischen Zusätzen* (Vakuum/Spektrum, konkrete Feldkoordinatisierung, Renormierung, Backreaction). Genau diese Trennung ist im FBA besonders natürlich, weil (i) aus Prozessklasse und Kausalordnung als *Referenzstruktur* folgt, während (ii) Skalen-/RG- und Geometriefragen berührt und deshalb in spätere Teile gehört.

V.6.1 Vom FBA-Netz zur algebraischen QFT: was ist „das Feld“?

In der algebraischen QFT ist das Primärobjekt nicht $\phi(x)$ als Operatorwertverteilung, sondern das *Netz* lokaler Observablenalgebren.[3, 4] Genau dieses Netz haben wir bereits konstruiert: $\mathcal{A}(\mathcal{O})$ kodiert, welche *Observablen/Effekte* in einer Region \mathcal{O} lokal zugänglich sind, und Mikrokausalität ist die algebraische Form von „raumartig getrennt beeinflusst sich nicht“ (Kapitel V.5). *Operationen* in \mathcal{O} erscheinen in dieser Sprache als CP-Maps im Heisenberg-Bild, die auf \mathcal{A} wirken. Dabei ist wichtig: Unselektierte Dynamik (CPTP im Schrödinger-Bild) entspricht CP-*unitalen* Maps im Heisenberg-Bild, während selektive Instrument-Zweige i. A. CP-*subunital* sind (die Summe ist unital).

Damit lautet die Überleitung im FBA:

$$\text{lokale QFT} \hat{=} (\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})) + \text{Zustandswahl} + \text{Dynamik/Regularität}.$$

Der erste Summand ist durch Kapitel V.5 gegeben; die beiden anderen bestimmen, *welche* Physik (Vakuum/Spektrum, thermische Zustände, Teilcheninhalt, Korrelationen) das Netz trägt.

V.6.2 Symmetrien: Lorentz-/Poincaré-Kovarianz, Generatoren und Erhaltungssätze

Die relativistische Referenzstruktur kommt im FBA über zwei Quellen zusammen: (1) die Kegelordnung (Quadrik/Front) fixiert im flachen Limes die Lorentz-kompatible Kausalstruktur,⁴³ (2) die lokale Prozessklasse (CPTP/GKLS) plus Mikrokausalität stellt sicher,

⁴¹Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6 „Komposition, No-Wire-Inflation & lokale Operationen“.

⁴²Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.6–II.7 „Budget-Quadrik, Minkowski-Limes & Lorentz“.

⁴³Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.6–II.7 „Budget-Quadrik, Minkowski-Limes & Lorentz“.

dass lokal unterstützte Dynamiken diese Kausalstruktur nicht verletzen (Kapitel V.5).⁴⁴ *Poincaré-Kovarianz* (inkl. Translationen) ist im Standardrahmen eine zusätzliche Symmetrieannahme des homogenen Referenzlimes und wird in der algebraischen Sprache über eine (projektive) unitäre Darstellung $U(\mathbb{I}, a)$ umgesetzt, die das Netz korrekt transformiert (vgl. Kovarianzforderung im Netzbegriff in Kapitel V.5).

Definition V.6.2.1: Erhaltungssätze aus Symmetrien (unter Darstellungsannahmen)

Unter der Annahme, dass die Translationsuntergruppe $a \mapsto U(\mathbb{I}, a)$ unitär und stark stetig ist, existieren nach dem Satz von Stone selbstadjungierte Generatoren $P_\mu = P_\mu^\dagger$ mit

$$U(\mathbb{I}, a) = e^{ia^\mu P_\mu},$$

wobei die Vorzeichenkonvention eine reine Definitionsfrage ist.[8] Translationsinvarianz der relevanten Zustände/Dynamiken führt dann in der üblichen Weise zu Erhaltungsaussagen (Energie/Impuls) *im Sinn der jeweiligen Darstellung*; die Identifikation mit lokalen Dichten (Stress-Energie) erfordert weitere Regularität.

Einordnung. Der FBA verschiebt hier nicht die Inhalte, sondern die Logik: Die Lorentz-/Kegelstruktur ist als Referenz aus Quadrik/Kalibration gewonnen, und Kovarianz/Generatoren sind der Standard-Nachlauf dieser Struktur *unter* Darstellungs- und Regularitätsannahmen.

V.6.3 Klassischer Anschluss: von Netzen und GKLS zu effektiven Feldgleichungen

Auch der klassische bzw. semiklassische Anschluss folgt derselben Trennlogik: Kinematisch bleibt das Netz erhalten (lokale Observablen bleiben lokal), während dynamisch bestimmte Zustände/Skalierungen in einem geeigneten Grenzregime wie klassische Feldgrößen bzw. Transportgleichungen erscheinen. Im FBA ist dieser Schritt transparent, weil Kontinuums- und Stetigkeitslimes bereits als kontrollierte Grenzformen der Update-/Prozessstruktur gelesen werden (Refinement \Rightarrow Kontinuum; Markov/Stetigkeit \Rightarrow GKLS).⁴⁵

Definition V.6.3.1: Klassischer Limes der QFT (als kontrolliertes Grenzregime)

Der klassische (bzw. semiklassische) Limes im FBA ist ein Grenzregime, in dem (i) Refinement die diskrete Update-Struktur in eine effektive Kontinuumsbeschreibung überführt und (ii) geeignete Zustände/Skalierungen dazu führen, dass Feldobservablen durch klassische Größen (Erwartungswerte, Wigner-/Phasenraum-Limes, effektive Transportgleichungen) beschrieben werden. In diesem Sinne erscheinen klassische Feldgleichungen als effektive Dynamik des zugrunde liegenden Netzes.

Zusammenfassung. Die lokale relativistische QFT ist im FBA keine zusätzliche Schicht, sondern die Standard-Lesart der bereits gewonnenen Struktur: Lichtkegel \Rightarrow Referenzkausalität,

⁴⁴Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.3–IV.5 „Zulässige Prozesse, Messinstrumente & GKLS“.

⁴⁵Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.4–IV.5 „Markov-Halbgruppen & GKLS“.

operative Reihenfolge-Unbeobachtbarkeit bei raumartiger Trennung \Rightarrow Mikrokausalität, Netz lokaler Algebren + (ggf. Kovarianz) + Time-Slice \Rightarrow Haag–Kastler-Kern (Kapitel V.4 und V.5). Symmetrien und Erhaltungssätze folgen wie üblich *unter* Darstellungs-/Stetigkeitsannahmen (Definition V.6.2.1), und der klassische Anschluss ist ein kontrolliertes Grenzregime der gleichen Struktur (Definition V.6.3.1). Damit ist die QFT-Seite im FBA als *Organisationsform zulässiger, lokal-kausaler Prozessstrukturen* präzise eingeordnet.

V.7 Zusammenfassung und Ausblick

V.7.1 Rekapitulation: Was ist in Teil V etabliert?

Wir haben den *lokalen, relativistischen Kinematik-Kern* im FBA als *abgeleitete* Struktur präzisiert:

- **Raumzeit als Referenzstruktur aus Updates.** Raumzeit-Patches entstehen als lokale Teilstrukturen der globalen Update-Ordnung durch Minimalereignisse und Refinement (Kapitel V.3); die Minkowski-Sprache dient dabei als Kurznotation für den flachen Referenzlimes (siehe Konventionen in Kapitel V.2).
- **Lichtkegel als Nullstruktur einer Invariante.** Die operative Kausalordnung wird über Quadrik und Front-Kalibration fixiert: Lichtkegel = Nullmenge des Linienelements, Signalfronten saturieren die Schranke (Kapitel V.4, Formelkasten V.4.1.1, Lemma V.4.3.1, und Definition V.4.2.1).
- **Lokale Felder als Netze, nicht als Zusatzpostulat.** Mikrokausalität wird als algebraische Form operativer *Reihenfolge-Unbeobachtbarkeit* raumartig getrennter lokaler Interventionen gefasst (in der Standard-Operator-Darstellung; Kapitel V.5, Lemma V.5.1, und Formelkasten V.5.1). Darauf aufbauend ergibt sich ein Netz lokaler C^* -Algebren $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$ mit (gradierter) Lokalität sowie (unter zusätzlichen Annahmen) Kovarianz und Time-Slice (Definition V.5.1 und Korollar V.5.1).
- **Offene lokale Dynamik ist kegelkonsistent.** Unselektierte Prozesse erscheinen als CP-unital Halbgruppen (Heisenberg-Bild) mit lokaler GKLS-Struktur, kompatibel mit dem kausalen Abschluss $J(\mathcal{O})$ (Kapitel V.5 und Formelkasten V.5.2).

Kernpunkt (flach/kinematisch)

Die lokale relativistische Struktur (Lichtkegel, Mikrokausalität, lokale Netze, lokale offene Dynamik) ist im FBA *kein unabhängiges Axiom*, sondern die konsistente Übersetzung von Front-Kalibration/Quadrik (Referenzkausalität) und Prozessklasse unter Komposition (CPTP/GKLS).

V.7.2 Anschluss an Standard-QFT: gleicher Rahmen, andere Ableitungslogik

Mit Kapitel V.6 ist die Überleitung zur (algebraischen) QFT explizit: Das Netz $\mathcal{O} \mapsto \mathcal{A}(\mathcal{O})$ ist das Primärobjekt; „Felder“ sind Darstellungen/Koordinatisierungen dieses Netzes. *Poincaré-Kovarianz* (insbesondere Translationen) wird dabei im flachen, homogenen Referenzlimes als *Standard-Zusatzannahme* formuliert; Erhaltungssätze folgen in der üblichen Weise, *sobald* eine ausreichend reguläre Darstellung (starke Stetigkeit der Symmetriemplementierung) gewählt ist (Definition V.6.2.1). Der klassische/semiklassische Anschluss ist als Grenzregime derselben Struktur formuliert (Definition V.6.3.1).

V.7.3 Was ist hier (noch) nicht behauptet?

Dieser Teil arbeitet *flach und kinematisch*: Wir haben den lokalen relativistischen *Kern* herausgearbeitet, aber *keine* vollständige Dynamik-Festlegung einer konkreten QFT vorgenommen

(Spektrum/Vakuum, konkrete Feldgeneratoren, Renormierung, Wechselwirkungsmodelle). Ebenso ist Gravitation/Backreaction hier nicht implementiert, sondern als späterer Programmschritt vorgesehen.⁴⁶ Gerade diese Trennung ist konzeptionell nützlich: Kausalordnung und Lokalität sind bereits fest, während Skalen/RG und Backreaction die *dynamischen* Zusätze sind.⁴⁷

V.7.4 Ausblick: nächste Schritte und Testpfade

Die folgenden Entwicklungsrichtungen sind im FBA natürlich und zugleich empirisch adressierbar:

1. **Zustandswahl, Spektrum, Teilcheninhalt.** Aufbau konkreter Modelle durch zusätzliche, testbare Annahmen (z. B. Spektrumsbedingung, Vakuumstruktur, thermische Zustände) auf dem bereits fixierten Netz-Kern (Definition V.5.1 und Korollar V.5.1).
2. **Skalen, Renormierung, effektive Theorien.** Präzisierung, wie Refinement/Coarse-Graining im FBA als RG-Fluss auf Netzen/Generatoren erscheint, und welche Invarianten dabei robust bleiben (insbesondere Kegelstruktur und Lokalität).⁴⁸
3. **Backreaction und dynamische Geometrie.** Erweiterung über den flachen Referenzlimes hinaus: Wenn Budgetflüsse die Referenzstruktur selbst beeinflussen, wird „Kausalordnung“ lokal dynamisch. Ziel ist eine kontrollierte Brücke zu gekrümmten, lokal-kausalen Beschreibungen, ohne Mikrokausalität und No-Signalling aufzugeben.⁴⁹
4. **Falsifizierbarkeit im lokalen QFT-Kern.** Konkrete Fail-Pfade ergeben sich bereits auf Kinematikniveau: (i) Verletzung der Frontschränke trotz korrekter Kalibration (Lemma V.4.3.1), (ii) *beobachtbare* Reihenfolgeabhängigkeit raumartig getrennter lokaler Interventionen (operativer Bruch der Reihenfolge-Unbeobachtbarkeit; in der Operator-Darstellung Bruch von (gradierter) Lokalität gemäß Formelkasten V.5.1), (iii) Inkonsistenzen zwischen lokaler GKLS-Dynamik und kausalem Abschluss (Formelkasten V.5.2).

Schlussbemerkung. Teil V liefert damit die *lokal-relativistische Feldebühne* im FBA: Kegelordnung, Mikrokausalität und Netzstruktur stehen als abgeleitete Konsistenzbedingungen bereit. Die folgende Arbeit verschiebt sich nun von „Welche lokale Struktur ist zwingend?“ zu „Welche dynamischen Zusätze selektieren die tatsächlich realisierte Physik?“ – insbesondere Skalen/RG, Zustandsspektren und (später) Backreaction/Gravitation.

⁴⁶Siehe FBA Teil VI: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen, Abschnitte VI.1–VI.4 „Geometrie/Gravitation aus Budgetflüssen“.

⁴⁷Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Abschnitte VII.2–VII.4 „Kalibration/Skalen & RG-Flüsse“.

⁴⁸Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Abschnitte VII.2–VII.4 „Kalibration/Skalen & RG-Flüsse“.

⁴⁹Siehe FBA Teil VI: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen, Abschnitte VI.1–VI.4 „Geometrie/Gravitation aus Budgetflüssen“.

V.8 Anhang: Überblick über die FBA-Reihe (Teile I–X)

Klick auf den Titel zum Download des PDF

1. **Teil I: FBA-Grundlagen: Abfolge, Budget, Eigenzeit & Pfeile.** *Ziel:* Basis-schicht bereitstellen: Abfolge, Budget, Eigenzeit/Alterung, Front und operativer Zeitpfeil (DPI); Minkowski-Limes aus der Budget-Quadrik; zulässige Dynamik und Lokalität/No-Signalling. *Import:* – (Referenz für alle Folgeteile). *Erweiterung:* Schnittstellenverträge, Pass/Fail-Checklisten, Lese-faden.
2. **Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie.** *Ziel:* Eigenzeit/Quadrik operativ fassen und Geodäten ableiten. *Import:* Grundlagen (Abfolge, Budget, Eigenzeit, Front/DPI). *Erweiterung:* glatter Limes, Variationsprinzip auf Weltlinien, Kalibration κ_τ .
3. **Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle.** *Ziel:* Zustandsräume und Kanäle (CPTP) samt Komposition. *Import:* Grundlagen (Budget, Kanalsicht, Komposition). *Erweiterung:* konkrete Divergenzen/Kostenfunktoren \mathcal{C} , Messungen und Klassik-Register.
4. **Teil IV: Dynamik, Messung & GKLS (offene Systeme).** *Ziel:* Kontinuierliche offene Dynamik (GKLS) und operativer Zeitpfeil. *Import:* Kanäle/DPI. *Erweiterung:* Spohn-Monotonie, stationäre/NESS-Referenzen, Flüsse $b^{\text{rev}}, b^{\text{irr}}, b^{\text{ext}}$.
5. **Teil V: Raumzeit, Lichtkegel & lokale Feldtheorie.** *Ziel:* Lokale Feldgleichungen unter Front/Lokalität. *Import:* Front, Komposition, No-Signalling. *Erweiterung:* lokale GKLS-Generatoren, Lieb–Robinson-artige Schranken, effektive Lichtkegel.
6. **Teil VI: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen.** *Ziel:* Geometrisierung von Budgetflüssen. *Import:* Budget-Quadrik/Eigenzeit. *Erweiterung:* effektive Metriken aus Kalibrationen (κ_t, κ_x) und internen Spannungen; Kopplung an Krümmung.
7. **Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung.** *Ziel:* Skalenführung der Kalibrations-sätze. *Import:* $c = \kappa_t/\kappa_x, \kappa_\tau$. *Erweiterung:* Flow-Gleichungen für $\kappa_t, \kappa_x, \kappa_\tau$; Stabilität von c .
8. **Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern.** *Ziel:* Makroskopik aus $A[\gamma]$ (Alterung) und DPI. *Import:* Eigenzeit/Alterung, Spohn. *Erweiterung:* Entropieproduktion, Euler–Lagrange-Formen für irreversible Flüsse, effektive Transportgleichungen.
9. **Teil IX: Kosmische Dynamik, Time Dilation & Inflation (TDI).** *Ziel:* Kosmische Abfolge & Kalibrationsfluss. *Import:* Budget, Eigenzeit/Front. *Erweiterung:* Budgetgleichungen auf großskaligen Slices; Time-Dilation-Inflation als Kalibrationsdynamik.
10. **Teil X: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA \rightarrow QM \leftrightarrow ART.** *Ziel:* Testbare Differenzen und Brücken FBA \leftrightarrow QM/ART. *Import:* alle Grundlagenbausteine. *Erweiterung:* Protokolle, Grenzfalltests, überbestimmte Konsistenzrelationen (Pass/Fail).

Alle Teile der FBA-Reihe sind in deutscher und englischer Sprache verfügbar unter
<https://www.frame-budget-approach.eu>

Literatur

- [1] W. Rindler. *Relativity. Special, General, and Cosmological*. 2. Aufl. Oxford: Oxford University Press, 2006. ISBN: 9780198567325.
- [2] S. M. Carroll. *Spacetime and Geometry. An Introduction to General Relativity*. San Francisco: Addison-Wesley, 2004. ISBN: 9780805387322.
- [3] R. Haag und D. Kastler. „An Algebraic Approach to Quantum Field Theory“. In: *Journal of Mathematical Physics* 5.7 (1964), S. 848–861. DOI: 10.1063/1.1704187.
- [4] R. Haag. *Local Quantum Physics: Fields, Particles, Algebras*. 2. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 1996. ISBN: 978-3-540-61049-6.
- [5] G. Lindblad. „On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups“. In: *Communications in Mathematical Physics* 48.2 (1976), S. 119–130. DOI: 10.1007/BF01608499.
- [6] V. Gorini, A. Kossakowski und E. C. G. Sudarshan. „Completely Positive Dynamical Semigroups of N -Level Systems“. In: *Journal of Mathematical Physics* 17.5 (1976), S. 821–825. DOI: 10.1063/1.522979.
- [7] H.-P. Breuer und F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford: Oxford University Press, 2002. ISBN: 9780199213900.
- [8] M. Reed und B. Simon. *Methods of Modern Mathematical Physics, Volume 1: Functional Analysis*. New York: Academic Press, 1972. ISBN: 0125850018.