

Der Frame–Budget–Ansatz (FBA)
Wie Zeit, Dynamik und Geometrie aus Budgetflüssen entstehen
Eine operative Brücke zwischen Quantenmechanik und Allgemeiner Relativitätstheorie

Teil IV: Dynamik, Messung & GKLS (offene Systeme)

Dipl. Wirt.-Inf. Jens Tetzner

21. Januar 2026

Inhaltsverzeichnis

IV	Dynamik, Messung & GKLS (offene Systeme)	2
IV.1	Einleitung & Zielbild	2
IV.2	Vorangestellte Grundlagen & Konventionen (Import aus Teil I: FBA - Grundlagen)	5
IV.3	Dynamik und zulässige Prozesse	9
IV.4	Messung als Coarse-Graining	13
IV.5	Markov-Prozesse und GKLS-Gleichung	17
IV.6	Übergang zur Semiklassik	20
IV.7	FBA und Irreversibilität	24
IV.8	Schlussfolgerungen	28
IV.9	Anhang: Überblick über die FBA-Reihe (Teile I–X)	30

Teil IV

Dynamik, Messung & GKLS (offene Systeme)

IV.1 Einleitung & Zielbild

IV.1.1 Motivation

Teil III hat die kinematische Sprache des FBA¹ fixiert: Zustände als Dichteoperatoren, Messausgänge als POVMs (Effekte als Elemente), Wahrscheinlichkeiten über die Born-Kopplung und zulässige diskrete Prozesse als CPTP.² Damit ist die nächste Frage nicht mehr, *wie* man Quantenobjekte schreibt, sondern *wann* eine zeitliche Entwicklung und eine Messprozedur als physikalisch zulässig gelten. Genau hier setzt diese Abhandlung an: Wir präzisieren Dynamik für offene Systeme so, dass Komposition, No-Signalling und Budgettreue nicht nur kinematische Leitplanken bleiben, sondern als explizite Bedingungen für Prozessklassen und (im Kontinuumslimit) Generatoren eingesetzt werden.³

Dabei ist die Reihenfolge entscheidend: CPTP ist nicht bloß ein „Format“ für Kanäle, sondern eine minimale, kompositionsstabile Schließung, die Positivität und Normierung auch unter Nebenregistern und Komposition stabil hält. Erst wenn diese Zulässigkeit gesichert ist, macht es Sinn, den Kontinuumslimit zu nehmen und nach Generatoren zu fragen. Und erst wenn Generatoren feststehen, kann man Irreversibilität operational als Monotonieaussage (DPI/Spohn, mit den jeweils nötigen Voraussetzungen) auswerten, ohne stillschweigend Post-Selection oder versteckte Nebenannahmen zu benutzen.⁴

IV.1.2 Zielbild

Am Ende dieses Teils sollen drei Ebenen sauber getrennt und zugleich zusammengesetzt sein:

1. **Zulässigkeit diskreter Schritte:** Kanäle, (Quanten-)Instrumente und Coarse-Grainings als CPTP-Struktur mit Stinespring/Kraus (Instrument = outcome-indizierte CP-Abbildungen, deren Summe ein CPTP-Kanal ist).
2. **Kontinuierlicher Fluss:** Markov- und Stetigkeitsannahmen führen (unter den üblichen Regularitätsvoraussetzungen) zu CP-Halbgruppen und ihrer GKLS-Generatorform.
3. **Irreversibilität als Monotonie:** DPI (für CPTP) und Spohns Ungleichung (im GKLS-Setting bei geeigneter Stationarität/Regularität) liefern eine protokollunabhängige Richtung für unselektierte Prozesse und damit eine operative Trennung zwischen reversiblen Grenzfällen und dissipativen Beiträgen.

Diese Trennung ist nicht kosmetisch: Sie entscheidet, ob spätere Aussagen über Alterung, Entropieproduktion und Messkosten als echte Konsequenzen oder als Konventionen gelesen werden müssen.⁵

¹Ein Überblick über alle Teile der FBA-Abhandlung inklusive Downloadlinks findet sich in Kapitel IV.9 dieses Dokuments.

²Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Abschnitte III.2–III.6.

³Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitte I.5–I.6.

⁴Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5.

⁵Siehe FBA Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern, Abschnitte VIII.6–VIII.8.

IV.1.3 Logikpfad

1. *Import der Kinematik.* Wir übernehmen Zustände, Effekte und Born-Kopplung aus Teil III, weil dynamische Aussagen nur sinnvoll sind, wenn klar ist, welche Objekte sie transformieren.⁶
2. *Zulässige Prozessklasse.* Wir fixieren CPTP nicht als Definition von QM, sondern als Konsequenz der Forderung, dass Prozesse unter Kopplung an Nebenregister und unter Komposition zulässig bleiben. Stinespring/Kraus sind dann nicht Zusatzwissen, sondern die Implementierungsform, die erklärt, warum offene Systemdynamik als Kopplung plus Coarse-Graining erscheint.⁷
3. *Messung als Instrument.* POVMs beschreiben Outcomes, aber Dynamik verlangt Updates. Deshalb wird Messung als (Quanten-)Instrument formuliert: eine outcome-indizierte Familie CP-Abbildungen, deren Summe ein CPTP-Kanal ist, und die sowohl Statistik als auch Zustandsupdate trägt, ohne die Zulässigkeit zu verletzen.⁸
4. *Kontinuumslimes und GKLS.* Unter Markov- und Stetigkeitsannahmen wird aus der diskreten Kanalverkettung eine Halbgruppe, und (unter geeigneten Regularitätsannahmen) ergibt sich die GKLS-Generatorform. Das ist der präzise Punkt, an dem „Differentialgleichung“ nicht als Zusatzpostulat, sondern als Grenzform zulässiger Komposition erscheint.⁹
5. *DPI/Spohn als operativer Pfeil.* Sobald die Dynamik als CPTP/GKLS fixiert ist, werden Monotonien nicht mehr bloß interpretativ, sondern als mathematische Aussagen belastbar: DPI und Spohn liefern eine Richtung für unselektierte Prozesse und damit eine robuste Irreversibilitätsstruktur, die später in Alterung und Thermodynamik übersetzt wird.¹⁰

IV.1.4 Scope und Abgrenzung

Wir arbeiten lokal und flach: keine Krümmung, keine Backreaction. Die Raumzeit- und Kalibrationsreferenz (Front-Protokoll, c , Kegelstruktur) wird als bereits etabliert vorausgesetzt.¹¹ Zulässige Dynamik wird als CPTP beziehungsweise als GKLS im Markov-Limes behandelt, und Lokalität sowie No-Signalling werden über die Kompositionsprinzipien mitgeführt.¹² Es werden keine $c = 1$ -Einheiten verwendet.

IV.1.5 Beitrag gegenüber Standard-QM

Standardtexte beginnen oft mit Hilbertraum, Observablen und einer Messregel und ergänzen offene Systeme über Zusatzpostulate. Hier ist die Richtung umgekehrt: Die Prozesszulässigkeit wird als kompositionsstabile Leitplanke formuliert, Messung als kontengetreues Coarse-Graining in dieselbe CPTP-Struktur eingebettet, und GKLS erscheint als Grenzform zulässiger Verkettung. Dadurch liegen unitäre Entwicklung, Messung, offene Systeme und Irreversibilität

⁶Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Abschnitte III.2–III.4.

⁷Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5.

⁸Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5.

⁹Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5.

¹⁰Siehe FBA Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern, Abschnitte VIII.6–VIII.8.

¹¹Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.9.

¹²Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6.

in einem konsistenten Baukasten, der später direkt in Pass/Fail-Protokolle übersetzt werden kann.¹³

IV.1.6 Lesefaden

Die Kapitelreihenfolge ist so gewählt, dass wir (i) die Prozessklasse und Kompositionsregeln fixieren, (ii) Messung als zulässiges Coarse-Graining einbetten, (iii) erst dann den Kontinuumslikes (Halbgruppen/GKLS) ziehen und (iv) darauf aufbauend Irreversibilität und Thermodynamik-Anschluss als Monotoniestruktur unselektierter Prozesse auswerten.

Kapitel IV.2 - Grundlagen & Konventionen: Import der verwendeten Bausteine und Fixierung der Notation. *Warum zuerst?* Weil GKLS- und DPI-Aussagen nur dann eindeutig sind, wenn klar ist, welche Prozessklasse und welche Kompositionsregeln gelten.

Kapitel IV.3 - Dynamik und zulässige Prozesse: CPTP als Zulässigkeitskern und strukturelle Schließung unter Nebenregistern und Komposition. *Warum hier?* Weil der Kontinuumslikes nur Sinn ergibt, wenn die diskrete Verkettung wohldefiniert und zulässig ist.

Kapitel IV.4 - Messung als Coarse-Graining: Messung als Instrument, POVMs als Effektfamilien, unselektierte Messung als CPTP-Coarse-Graining. *Warum jetzt?* Weil Irreversibilität und Entropieproduktion erst dann sauber formulierbar sind, wenn klar ist, was als unselektierter Kanal gilt und was Post-Selection ist.

Kapitel IV.5 - Markov-Prozesse und GKLS: Kontinuierliche Dynamik als Halbgruppe und GKLS als zulässige Generatorstruktur. *Warum danach?* Weil GKLS eine Aussage über Grenzformen zulässiger Komposition ist, nicht über einzelne Schritte.

Kapitel IV.6 - Übergang zur Semiklassik: Kontrollierte Grenzannahmen, unter denen GKLS in klassische Drift-Diffusions-Beschreibungen übergeht. *Warum hier?* Weil der klassische Anschluss erst Sinn ergibt, wenn der zulässige Kontinuumsfluss (GKLS) bereits präzise fixiert ist.

Kapitel IV.7 - FBA und Irreversibilität: DPI/Spohn als operativer Pfeil, Entropieproduktionsrate und Budget-Lesart des irreversiblen Anteils. *Warum zuletzt im Kern?* Weil Monotonien erst dann belastbar sind, wenn Prozessklasse und Generatorstruktur feststehen.

Kapitel IV.8 - Schlussfolgerungen: Konsolidierung der Ergebnisse, Pfadkarte zu Thermodynamik, Skalenfragen sowie Feld- und Geometrieseite und Übergang zu testbaren Pass/Fail-Kriterien.

¹³Siehe FBA Teil X: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA \rightarrow QM \leftrightarrow ART, Abschnitte X.6–X.8.

IV.2 Vorangestellte Grundlagen & Konventionen (Import aus Teil I: FBA - Grundlagen)

Warum ein Import? In Teil IV wollen wir Dynamik nicht als zusätzliche Postulate „oben drauf“ setzen, sondern als kontrollierte Fortsetzung der in Teil III fixierten Kinematik und Zulässigkeit: Zustände, Effekte und Born-Kopplung sind gegeben, und zulässige Schritte müssen unter Komposition, Nebenregistern und Coarse-Graining stabil bleiben. Genau deshalb importieren wir die Primitiven aus Teil I unverändert. Der praktische Gewinn ist klar: Sobald die Prozessklasse (CPTP) und die Kompositionsregeln feststehen, sind GKLS-Generatoren und DPI/Spohn keine interpretativen Zusätze mehr, sondern Aussagen über Grenzformen und Monotonien dieser Klasse. Die Details und Vollbeweise bleiben an der Stelle, wo sie hingehören – bei den Grundbausteinen.¹⁴

Lesefaden-Hinweis. Teil III liefert die kinematische Operator-Sprache; Teil IV benutzt sie als Arbeitswerkzeug und ergänzt genau die zusätzliche Struktur, die für kontinuierliche Flüsse, Messinstrumente und irreversibles Verhalten nötig ist.¹⁵ Die metrologische Referenz (Zeit, c , Kausalstruktur) wird aus Teil II übernommen und hier nicht neu hergeleitet.¹⁶

¹⁴Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitte I.5–I.6 „CPTP/GKLS, DPI/Spohn & Komposition“.

¹⁵Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Abschnitte III.2–III.6 „Zustände, POVMs & CPTP-Kanäle“.

¹⁶Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.9 „Kalibration, Quadrik & Kegelstruktur“.

Importierte Bausteine (unverändert)

- **Abfolge globaler Zustände & Minimalereignisse:** Frame-Abfolge, Minimalereignis sowie Koaktualität und Refinement-Invarianz.^a
- **Differenzfunktion & operative Minimaldifferenz:** Operatives Differenzmaß als Grundlage refinement-stabiler Ordnungen.^b
- **Budget-Kalkül (intern/extern/irreversibel) & Bilanz:** Ein-Schritt-Budget, Bilanzgleichungen und Refinement-Invarianz.^c
- **Kalibration & Front (Referenzstruktur):** Kalibration, Frontschränke und Signalfrent.^d
- **Eigenzeit & Altern (für den Anschluss an Irreversibilität):** Eigenzeit, Alterung, Minkowski-Limes und Zeitdilatation als Referenzlimes.^e
- **Zulässige Dynamik (CPTP/GKLS), DPI/Spohn:** Admissible Channels (CPTP), Kraus/Stinespring, Messung als CPTP, GKLS-Generatoren, Spohn-Monotonie, Semigroup-Budget, DPI-Pfeil und No-Recovery.^f
- **Komposition, Lokalität & No-Signalling:** Symmetrisch-monoidale Struktur, Budget-Additivität, No-Wire-Inflation und lokale Operationen, Kausalkegel und lokale GKLS.^g

^aSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.2.

^bSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.2.

^cSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.3.

^dSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.3.

^eSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.4.

^fSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5.

^gSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6.

Wozu genau dienen diese Importe in Teil IV? CPTP liefert die Prozessklasse für diskrete Schritte. GKLS ist die Grenzform dieser Klasse unter Markov- und Stetigkeitsannahmen. Und DPI/Spohn ist die Monotoniestruktur, die nur dann belastbar ist, wenn man unselektierte Prozesse sauber von Post-Selection trennt. Genau deshalb stehen Zulässigkeit und Komposition hier vor allen thermodynamischen Interpretationen.

Notation & Konventionen

- **Diskret vs. Kontinuum:** Schrittindex $n \in \mathbb{Z}$ für diskrete Updates; $\Delta(\cdot)$ für diskrete Inkremente, $d(\cdot)$ für differentielle Größen im Limes.
- **Zustände, Effekte, POVMs:** Zustände $\rho \geq 0$, $\text{Tr}(\rho) = 1$ (in endlichdimensionalen Systemen: ρ Matrix; allgemein: ρ positiv und spurklassig). Effekte $0 \leq E \leq \mathbb{I}$. POVM $\{E_i\}_i$: $E_i \geq 0$, $\sum_i E_i = \mathbb{I}$. Born-Regel: $p(i) = \text{Tr}(\rho E_i)$.
- **Kanäle und Bilder:** CPTP-Kanäle Φ (auch \mathcal{E}) wirken im Schrödinger-Bild auf Zustände: $\rho \mapsto \Phi(\rho)$. Das adjungierte Heisenberg-Bild ist Φ^* (Dualität Trace-class \leftrightarrow beschränkte Operatoren) mit

$$\text{Tr}(\Phi(\rho) A) = \text{Tr}(\rho \Phi^*(A)) \quad \text{für alle Zustände } \rho \text{ und } A \in \mathcal{B}(\mathcal{H}).$$

Für CPTP Φ ist Φ^* vollständig positiv und unital (CP-unital): $\Phi^*(\mathbb{I}) = \mathbb{I}$.

- **Komposition:** Serielle Komposition \circ , parallele Komposition \otimes . Identität id . Partielle Spur Tr_E als Coarse-Graining.
- **Instrumente (Messung mit Update):** Ein (Quanten-)Instrument ist eine Familie vollständig positiver Abbildungen $\{\mathcal{I}_i\}_i$, die *spur-nicht-erhöhend* sind, d. h. $\text{Tr}(\mathcal{I}_i(\rho)) \leq \text{Tr}(\rho)$ für alle $\rho \geq 0$, so dass die unselektierte Summe

$$\Phi \equiv \sum_i \mathcal{I}_i$$

ein CPTP-Kanal ist. Die zugehörige POVM ist über

$$E_i = \mathcal{I}_i^*(\mathbb{I})$$

definiert. Outcome-Wahrscheinlichkeiten und posteriore Zustände:

$$p(i) = \text{Tr}(\mathcal{I}_i(\rho)), \quad \rho_i = \mathcal{I}_i(\rho)/p(i) \quad (p(i) > 0).$$

[1–3]

- **Halbgruppen und GKLS:** Eine (quantendynamische) Halbgruppe ist $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ mit $\mathcal{T}_0 = \text{id}$, $\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t \circ \mathcal{T}_s$, und jeder \mathcal{T}_t CPTP. Im Markov-Setting nehmen wir (mindestens) starke Stetigkeit in der Spur-Norm an; der Generator \mathcal{L} ist dann i. A. dicht definiert (in endlichdimensionalen Systemen beschränkt), und $\rho_t = \mathcal{T}_t(\rho_0)$ löst $\frac{d}{dt}\rho_t = \mathcal{L}(\rho_t)$ für ρ_0 im Definitionsbereich. Die GKLS-Form wird in Kapitel IV.5 hergeleitet und anschließend benutzt.[4–6]
- **Entropien, DPI und Spohn (wo benötigt):** Von-Neumann-Entropie $S(\rho) = -\text{Tr}(\rho \log \rho)$. Relative Entropie $S(\rho \|\sigma) = \text{Tr}(\rho(\log \rho - \log \sigma))$ für $\text{supp}(\rho) \subseteq \text{supp}(\sigma)$, sonst $S(\rho \|\sigma) = +\infty$. DPI: $S(\Phi(\rho) \|\Phi(\sigma)) \leq S(\rho \|\sigma)$ für CPTP Φ . Spohn-Monotonie bezeichnet die GKLS-spezifische Entropieproduktions-Ungleichung unter den jeweils nötigen Stationaritäts-/Regularitätsvoraussetzungen.[7–9]
- **Budget-Zerlegung (Referenz):** Pro Schritt δb_{int} , δb_{ext} , δb_{irr} (intern/extern/irreversibel). Wir behalten die Zeitkalibration κ_τ aus Teil II explizit:^a

$$d\tau_{\text{geo}} \equiv \frac{db_{\text{int}}^{\text{rev}}}{\kappa_\tau}, \quad dA \equiv \frac{db_{\text{irr}}}{\kappa_\tau} \geq 0, \quad d\tau_{\text{tot}} = d\tau_{\text{geo}} + dA.$$

(Diskret analog: $\Delta\tau_{\text{geo}} = \Delta b_{\text{int}}^{\text{rev}}/\kappa_\tau$, $\Delta A = \Delta b_{\text{irr}}/\kappa_\tau$.)

- **Raumzeit- und Kalibrationsreferenz:** c bleibt explizit (keine $c = 1$ -Einheiten). Zeitparameter t ist die kalibrierte Skala aus dem Front-Protokoll.^b
- **Zeichenkonventionen:** Erwartungswerte $\mathbb{E}[\cdot]$, Supremum \sup . Normen werden kontextabhängig kenntlich gemacht, z. B. Spur-Norm $\|\cdot\|_1$ und Operatornorm $\|\cdot\|_\infty$.

^aSiehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.9.

^bSiehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.9.

Konsequenz. Mit diesen Importen und Konventionen können wir in Kapitel IV.4 direkt Messung als Instrument in die CPTP-Struktur einbetten, in Kapitel IV.5 den GKLS-Limes als Halbgruppen-Generator präzisieren, und in Kapitel IV.7 DPI/Spohn als robusten, unselektierten Irreversibilitäts-Pfeil auswerten – ohne versteckte Konventionswechsel.

IV.3 Dynamik und zulässige Prozesse

Teil III hat die kinematische Sprache (Zustände, POVMs, Born-Kopplung) fixiert und dabei bereits klar gemacht, warum *Prozesszulässigkeit* nicht beliebig sein darf: Sobald man Nebenregister zulässt und Prozesse seriell sowie parallel komponiert, muss die Klasse der Updates unter genau diesen Operationen geschlossen bleiben.¹⁷ Dieses Kapitel macht den nächsten Schritt: Wir fixieren die zulässige Prozessklasse für diskrete Schritte als CPTP und führen dann den Markov- und Stetigkeitslimes ein, in dem Generatoren und GKLS-Form sinnvoll definiert sind.¹⁸

IV.3.1 Zulässige Transformationen und CPTP-Kanäle

Im FBA ist ein „Schritt“ zunächst nichts anderes als ein Update entlang der Frame-Abfolge. Damit aus solchen Updates Physik wird, muss man entscheiden, welche Transformationen als *zulässig* gelten. Die Zulässigkeit ist dabei nicht ästhetisch, sondern operativ: Aus Zuständen sollen wieder Zustände werden, Wahrscheinlichkeiten sollen positiv bleiben, und Normierung darf unter zulässigen Operationen nicht verloren gehen. Genau diese Forderungen führen zur Klasse der CPTP-Kanäle.¹⁹

Definition IV.3.1.1: CPTP-Kanal

Sei \mathcal{H} ein (hier: endlichdimensionaler) Hilbertraum und $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ der Raum linearer Operatoren auf \mathcal{H} . Ein *CPTP-Kanal* ist eine lineare Abbildung $\mathcal{E} : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit:

- **Vollständige Positivität:** Für jedes Nebenregister \mathcal{H}' ist $\mathcal{E} \otimes \text{id}_{\mathcal{H}'}$ positiv auf $\mathcal{B}(\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}')$.
- **Spurtreue:** $\text{Tr}(\mathcal{E}(X)) = \text{Tr}(X)$ für alle $X \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$.

Insbesondere gilt dann: $\rho \in \mathcal{S}(\mathcal{H}) \Rightarrow \mathcal{E}(\rho) \in \mathcal{S}(\mathcal{H})$. (In unendlichdimensionalen Systemen arbeitet man typischerweise mit normaler CP-Abbildung auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ bzw. äquivalent mit einer spurtreuen CP-Abbildung auf den spurklassigen Operatoren; die Domänen-/Stetigkeitsfragen werden im GKLS-Kapitel explizit behandelt.) [3, 10, 11]

Dass gerade *vollständige* Positivität gebraucht wird, ist der Punkt, an dem Nebenregister und Komposition wirklich „zubeißen“: Ein Update darf nicht nur isoliert, sondern muss auch im Verbund mit beliebigen, unbeobachteten Hilfsregistern physikalisch konsistent bleiben.

¹⁷Siehe FBA Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle, Abschnitte III.2–III.4 „Zustände, Effekte & Prozessschluss“.

¹⁸Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5 „Admissible Channels (CPTP) & GKLS-Generatoren“.

¹⁹Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5 „Admissible Channels (CPTP)“.

Warum CPTP die richtige Zulässigkeitsklasse ist (Lesart im FBA)

- **CP statt bloß positiv:** Positivität allein sichert nur, dass \mathcal{E} isolierte Zustände nicht in „negative Wahrscheinlichkeiten“ schickt. In realen Protokollen koppeln Systeme aber an Nebenregister (Umgebung, Messapparat, Referenzen). Die Forderung, dass \mathcal{E} auch auf ρ_{SE} keine Negativität erzeugt, ist genau vollständige Positivität.
- **Spurtreue als Normierungskriterium:** Spurtreue garantiert, dass ein *unselektierter* Schritt die Gesamtnormierung erhält. Selektierte Teilprozesse (z. B. Mess-Updates) sind CP und spur-nicht-erhöhend; ihre Summe ist wieder ein CPTP-Kanal (siehe Instrumente in Kapitel IV.2).
- **Kompositionsschluss:** Serielle Verkettung und parallele Zusammensetzung zulässiger Schritte muss wieder zulässig sein. CPTP ist unter \circ und \otimes geschlossen und damit kompatibel mit der importierten Kompositionsstruktur.^a

^aSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6 „Symmetrisch-monoidale Struktur & No-Wire-Inflation“.

Damit ist die Verbindung zur Frame-Abfolge sauber: Jeder Schritt $F_n \rightarrow F_{n+1}$ entspricht einem zulässigen Update $\rho \mapsto \mathcal{E}(\rho)$, dessen interne, externe und irreversible Budgetanteile die physikalischen Kosten dieses Updates kodieren.²⁰

IV.3.2 Markov-Halbgruppen

Für viele Anwendungen genügt die diskrete Sicht auf Updates nicht: Man will Prozesse kontinuierlich parametrisieren und lokale Raten angeben. Dazu braucht man einen Kontinuumslimites, der Kompositionsschluss respektiert. Die operative Annahme dahinter heißt „Markov“: Wenn man den Zustand $\rho(t)$ zu Zeit t kennt, steckt die für die Zukunft relevante Information bereits vollständig darin. Mathematisch wird das als Halbgruppenstruktur formuliert.

Definition IV.3.2.1: Markov-Halbgruppe (quantendynamisch)

Eine *Markov-Halbgruppe* ist eine Familie $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ von CPTP-Kanälen, die auf Zustände via $\rho \mapsto \mathcal{T}_t(\rho)$ wirkt, mit:

- **Halbgruppe:** $\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t \circ \mathcal{T}_s$ für alle $t, s \geq 0$,
- **Startwert:** $\mathcal{T}_0 = \text{id}$,
- **starke Stetigkeit (auf Zuständen):** $t \mapsto \mathcal{T}_t(\rho)$ ist stetig in Spur-Norm $\|\cdot\|_1$ für alle Zustände ρ .

[5, 6]

Die Stetigkeitsannahme ist der technische Hebel, der aus „Verkettung vieler kleiner CPTP-Schritte“ einen Generator macht. Ohne sie könnte man zwar Halbgruppen definieren, aber keine wohldefinierte infinitesimale Rate.

²⁰Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.3 „Ein-Schritt-Budget & Bilanz“.

Formelkasten IV.3.2.1: Generator einer CPTP-Halbgruppe

Ist $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ stark stetig (in $\|\cdot\|_1$ auf Zuständen), dann ist der Generator \mathcal{L} als (i. A. unbeschränkter) Operator mit Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) \equiv \left\{ \rho : \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{T}_t(\rho) - \rho}{t} \text{ existiert in } \|\cdot\|_1 \right\}$$

gegeben durch

$$\mathcal{L}(\rho) \equiv \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{T}_t(\rho) - \rho}{t} \quad (\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{L})).$$

Für Anfangsdaten $\rho(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ gilt dann (im geeigneten Sinn) die Mastergleichung

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}(\rho(t)), \quad \rho(t) = \mathcal{T}_t(\rho(0)).$$

IV.3.3 GKLS-Form und ihre Entstehung

Jetzt kommt der entscheidende Punkt: *Nicht* jede lineare Differentialgleichung definiert eine CPTP-Evolution, und genau deshalb ist die GKLS-Form kein beliebiger Ansatz, sondern die strukturell richtige Charakterisierung von Generatoren, die vollständige Positivität und Spurtreue für alle Zeiten erhalten. Im FBA ist das die Kontinuumsfassung derselben Zulässigkeitslogik wie bei diskreten CPTP-Schritten.²¹

Lemma IV.3.3.1: GKLS-Gleichung (Satz von Gorini–Kossakowski–Lindblad–Sudarshan)

Sei \mathcal{H} endlichdimensional und $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ eine stark stetige CPTP-Markov-Halbgruppe. Dann lässt sich ihr Generator \mathcal{L} in GKLS-Form schreiben:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}(\rho(t)),$$

mit

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_{k=1}^K \left(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho\} \right),$$

wobei $H = H^\dagger$ der effektive Hamiltonoperator ist, $\{A, B\} = AB + BA$ den Antikommutator bezeichnet und $\{L_k\}_{k=1}^K$ Lindblad-Operatoren sind. [4–6]

Damit ist auch klar, warum die GKLS-Form eine natürliche „Schnittstelle“ zur Budgetseite liefert: Der Hamiltonterm ist der reversible Anteil, der Dissipatorterm beschreibt den Austausch mit nichtaufgelösten Freiheitsgraden und ist die Stelle, an der irreversible Budgetanteile (Alterung, Entropieproduktion) ansetzen. Die dafür benötigten Monotonieaussagen (DPI/Spohn) werden erst nach sauberer Trennung von unselektierten Kanälen und Post-Selection präzise ausgewertet.²²

²¹Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5 „GKLS-Generatoren (offene Systeme)“.

²²Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5 „Spohn-Monotonie & Semigroup-Budget“.

Beweisskizze IV.3.3.1: Warum GKLS aus CPTP + Halbgruppe folgt (Skizze)

1. **Kleinschritt-Dilatation:** Für kleine Zeiten t ist \mathcal{T}_t CPTP und besitzt damit eine Stinespring-Dilatation als unitäre Kopplung an ein Nebenregister plus partielle Spur.
2. **Halbgruppenstruktur:** Die Relation $\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t \circ \mathcal{T}_s$ stellt sicher, dass die Kleinschrittstruktur konsistent verkettet werden kann, ohne die Zulässigkeit zu verlieren.
3. **Infinitesimale Form:** Nimmt man den stetigen Grenzübergang $t \downarrow 0$, zerfällt die erste Ordnung in einen kommutatorischen (reversiblen) Anteil und einen dissipativen Anteil, der so strukturiert sein muss, dass CP und TP für alle Zeiten erhalten bleiben.

Vollständige Ausarbeitungen und Regularitätsdetails finden sich an der Basisstelle.^a
[4–6]

^aSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5 „GKLS-Generatoren (offene Systeme)“.

Übergang. Im folgenden Kapitel IV.4 nutzen wir die CPTP-Struktur, um Messung als zulässiges Coarse-Graining (Instrument) zu fassen. Erst danach werten wir Irreversibilität als Monotonieaussage aus: DPI und Spohn liefern den operativen Pfeil für *unselektierte* Prozesse und trennen damit reversible Grenzfälle von dissipativen Beiträgen.

IV.4 Messung als Coarse-Graining

Nachdem Kapitel IV.3 zulässige Dynamik als CPTP (diskret) und im Markov-Limes als GKLS (kontinuierlich) fixiert hat, müssen Messungen in denselben Rahmen passen. Das ist im FBA keine Geschmacksfrage, sondern eine Konsistenzforderung: Wenn Messung eine physikalische Operation ist, darf sie nicht außerhalb der Zulässigkeitsklasse stehen, die wir aus Komposition, Nebenregistern und Budgettreue gewinnen.²³ Die richtige Formulierung ist daher: Messung ist ein *kontengetreues Coarse-Graining* – entweder mit klassischem Outcome-Register (selektiv, d. h. konditioniert auf Information), oder als unselektierter Kanal, wenn der Outcome verworfen wird.

IV.4.1 Messungen als spezielle Coarse-Grainings

Eine POVM allein beschreibt nur die Statistik der Outcomes. Für Dynamik benötigen wir zusätzlich das Zustandsupdate. Genau diese Kombination aus Statistik und Update ist ein *Instrument*: eine Familie CP-Maps, deren Summe ein CPTP-Kanal ist. Damit wird Messung zu einem Spezialfall zulässiger Dynamik, statt eine Ausnahme zu bleiben.

Definition IV.4.1.1: Messinstrument (Outcome + Update) als CP-Zerlegung eines CPTP-Kanals

Sei \mathcal{H} endlichdimensional und $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ der Operatorraum. Ein (*Quanten-*)*Instrument* ist eine Familie $\{\mathcal{I}_i\}_i$ linearer Abbildungen $\mathcal{I}_i : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$ mit:

1. **CP-Eigenschaft:** Jede \mathcal{I}_i ist vollständig positiv (CP).
2. **selektiv spur-nicht-erhöhend:** Für alle $\rho \geq 0$ gilt $\text{Tr}(\mathcal{I}_i(\rho)) \leq \text{Tr}(\rho)$.
3. **unselektierte Zulässigkeit:** Die Summe $\Phi \equiv \sum_i \mathcal{I}_i$ ist ein CPTP-Kanal.

Für einen Eingangszustand ρ sind

$$p(i) = \text{Tr}(\mathcal{I}_i(\rho)), \quad \rho_i = \frac{\mathcal{I}_i(\rho)}{p(i)} \quad (p(i) > 0)$$

die Outcome-Wahrscheinlichkeit und der a-posteriori Zustand. [1-3]

Die POVM ist in dieser Sicht kein zusätzliches Axiom, sondern die „Heisenberg-Schattenseite“ des Instruments: Sie kodiert genau die Outcome-Statistik, unabhängig davon, welches Update man danach implementiert.

²³Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitte I.5–I.6 „Messung als CPTP, Komposition & No-Signalling“.

Lemma IV.4.1.1: POVM als vom Instrument induzierte Effektfamilie

Sei $\{\mathcal{I}_i\}_i$ ein Instrument und \mathcal{I}_i^* die adjungierte Abbildung im Heisenberg-Bild. Dann definieren die Effekte

$$E_i \equiv \mathcal{I}_i^*(\mathbb{I})$$

eine POVM, d. h. $E_i \geq 0$ und $\sum_i E_i = \mathbb{I}$. Außerdem gilt für alle Zustände ρ :

$$p(i) = \text{Tr}(\mathcal{I}_i(\rho)) = \text{Tr}(\rho E_i).$$

[2, 3]

Operativ ist die Aussage: *Ein Instrument trägt die Statistik schon in seiner Heisenberg-Seite.* Die Effekte $E_i = \mathcal{I}_i^*(\mathbb{I})$ sind genau die Objekte, die für *alle* Eingänge ρ die beobachteten Häufigkeiten reproduzieren.

Beweisskizze IV.4.1.1: Warum ein Instrument automatisch eine POVM induziert

Für $\rho \geq 0$ ist $\mathcal{I}_i(\rho) \geq 0$ (CP), also $p(i) = \text{Tr}(\mathcal{I}_i(\rho)) \geq 0$. Mit der Definition der Adjungierten folgt

$$p(i) = \text{Tr}(\mathcal{I}_i(\rho)) = \text{Tr}(\rho \mathcal{I}_i^*(\mathbb{I})) = \text{Tr}(\rho E_i).$$

Da $\text{Tr}(\rho E_i) \geq 0$ für alle $\rho \geq 0$, gilt $E_i \geq 0$. Weiter ist $\Phi = \sum_i \mathcal{I}_i$ (unselektiert) CPTP, insbesondere spurtreu, also

$$\sum_i p(i) = \sum_i \text{Tr}(\mathcal{I}_i(\rho)) = \text{Tr}(\Phi(\rho)) = \text{Tr}(\rho).$$

Andererseits ist $\sum_i p(i) = \sum_i \text{Tr}(\rho E_i) = \text{Tr}(\rho \sum_i E_i)$. Damit gilt $\text{Tr}(\rho \sum_i E_i) = \text{Tr}(\rho)$ für alle Zustände ρ , also $\sum_i E_i = \mathbb{I}$.

Bemerkung (Notation in der QM-Literatur). Häufig werden statt der Effekte E_i sogenannte Messoperatoren (Kraus-Operatoren) M_i angegeben, mit $E_i = M_i^\dagger M_i$. Dann ist das selektive Update $\mathcal{I}_i(\rho) = M_i \rho M_i^\dagger$, und die unselektierte Map lautet $\Phi(\rho) = \sum_i M_i \rho M_i^\dagger$. Im FBA ist diese Schreibweise nur eine Darstellung desselben Instruments.²⁴ [3, 11, 12]

²⁴Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5 „Kraus/Stinespring & Messung als CPTP“.

Messung als Coarse-Graining: selektiv vs. unselektiert

- **Selektiv (konditioniert auf Outcome):** Man konditioniert auf ein Outcome i und erhält ρ_i . Als Abbildung auf dem System allein ist das eine CP, spur-nicht-erhöhende Operation \mathcal{I}_i (also *nicht* CPTP). Physikalisch entspricht die Selektivität dem Mitführen eines klassischen Outcome-Registers; auf $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_{\text{out}}$ ist die Gesamtbeschreibung wieder CPTP.
- **Unselektiert (Outcome verworfen):** Man verwirft das Outcome und beschreibt nur die resultierende Systemdynamik $\Phi = \sum_i \mathcal{I}_i$. Genau das ist Coarse-Graining: feinere Information (welches i auftrat) wird nicht mehr geführt.

Im FBA ist wichtig, beide Ebenen strikt zu trennen: Zulässigkeit und Monotonien (DPI/Spohn) beziehen sich auf unselektierte CPTP-Dynamik, nicht auf Post-Selection.

IV.4.2 Dilationsprinzip: Warum Messung in CPTP eingebettet werden muss

Dass Messung als Instrument formuliert werden kann, ist kein Zufall: Es ist die operative Form derselben Idee wie Stinespring-Dilatation. Messung entsteht aus Kopplung an ein Nebenregister plus anschließendem Coarse-Graining (partielle Spur oder klassisches Auslesen). Damit wird transparent, wo Irreversibilität herkommt: nicht aus „mystischem Kollaps“, sondern aus dem Verwerfen von Information über Nebenfreiheitsgrade.

Formelkasten IV.4.2.1: Dilatationsdarstellung einer Messung (unitäre Kopplung + Auslesen)

Für jede POVM $\{E_i\}_i$ existieren (im endlichdimensionalen Setting, bei endlicher Outcome-Menge) ein Nebenregister \mathcal{H}_A , ein Zustand σ_A , eine unitäre Kopplung U auf $\mathcal{H} \otimes \mathcal{H}_A$ und Projektoren $\{\Pi_i\}_i$ auf \mathcal{H}_A , so dass

$$p(i) = \text{Tr}\left(U(\rho \otimes \sigma_A)U^\dagger (\mathbb{I} \otimes \Pi_i)\right).$$

Ein *kanonisches* Instrument, das diese POVM realisiert, erhält man, indem man nach dem Auslesen Π_i das Nebenregister coarse-grained:

$$\mathcal{I}_i(\rho) = \text{Tr}_A\left((\mathbb{I} \otimes \Pi_i)U(\rho \otimes \sigma_A)U^\dagger (\mathbb{I} \otimes \Pi_i)\right), \quad \Phi(\rho) = \sum_i \mathcal{I}_i(\rho).$$

[2, 3, 10]

IV.4.3 Coarse-Graining und Entropie: Informationsverlust als DPI-Aussage

Der entscheidende Punkt ist: *Coarse-Graining ist irreversibel*, weil es Unterscheidbarkeit vernichtet. Das lässt sich ohne Interpretation direkt als Datenverarbeitungs-Ungleichung formulieren. Damit wird Entropieproduktion nicht zur Metapher, sondern zu einer operativen Monotonieaussage über zulässige Kanäle.²⁵

²⁵Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5 „DPI-Pfeil & Spohn-Monotonie“.

Formelkasten IV.4.3.1: DPI für Messung: Unterscheidbarkeit kann durch Coarse-Graining nur abnehmen

Sei Φ ein CPTP-Kanal (insbesondere eine unselektierte Messmap) und seien ρ, σ zwei Zustände. Dann gilt für die relative Entropie

$$S(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)) \leq S(\rho\|\sigma), \quad S(\rho\|\sigma) \equiv \text{Tr}(\rho(\log \rho - \log \sigma)),$$

wobei $S(\rho\|\sigma) = +\infty$ gilt, falls $\text{supp}(\rho) \not\subseteq \text{supp}(\sigma)$. Die Differenz

$$\Delta_{\Phi}(\rho, \sigma) \equiv S(\rho\|\sigma) - S(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)) \geq 0$$

quantifiziert den Informationsverlust durch das Coarse-Graining: Nach Anwendung von Φ sind die beiden Hypothesen ρ und σ operativ schlechter unterscheidbar. [3, 7, 8]

Diese Formulierung ist bewusst paarweise: Sie macht klar, was „Informationsverlust“ in Experimenten heißt, nämlich Verlust an Unterscheidbarkeit zwischen möglichen Präparationen. Für kontinuierliche GKLS-Flüsse wird dieselbe Idee als Spohn-Monotonie in eine Entropieproduktionsrate übersetzt; das ist der nächste Schritt in Kapitel IV.7.

IV.5 Markov-Prozesse und GKLS-Gleichung

In Kapitel IV.3 haben wir zulässige diskrete Updates als CPTP-Kanäle fixiert und damit die Prozessklasse festgelegt, die unter Komposition und Nebenregistern stabil bleibt. Für viele Anwendungen reicht diese diskrete Sicht jedoch nicht: Man möchte *Raten* angeben, Mastergleichungen formulieren und die Trennung zwischen reversiblen und dissipativen Anteilen in einem Kontinuumslimit präzisieren. Genau hier kommt der Markov-Limes ins Spiel: Er ist die kontrollierte Modellannahme, dass die effektive Beschreibung eines offenen Systems (nach dem gewählten Coarse-Graining) durch eine halbgruppenartige, speicherlose Entwicklung getragen wird. Die GKLS-Form ist dann nicht ein zusätzlicher Ansatz, sondern die Charakterisierung derjenigen Generatoren, die diese Zulässigkeit im Kontinuum erhalten.²⁶

IV.5.1 Markov-Halbgruppen

Die Markov-Annahme ist im FBA keine metaphysische Behauptung über die Natur, sondern eine Modellentscheidung über das, was wir *nicht* mehr explizit auflösen: Umgebung und Korrelationsgedächtnis werden coarse-grained, so dass die Zukunftsdynamik nur vom aktuellen Systemzustand abhängt. Damit wird die Verkettung vieler kleiner zulässiger Schritte zu einer Halbgruppe.[6]

Definition IV.5.1.1: Markov-Halbgruppe (stark stetig)

Sei \mathcal{H} (hier) endlichdimensional und $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ der Operatorraum. Eine *Markov-Halbgruppe* ist eine Familie $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ von CPTP-Kanälen $\mathcal{T}_t : \mathcal{B}(\mathcal{H}) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H})$, die auf Zustände wirkt, mit:

- **Halbgruppe:** $\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t \circ \mathcal{T}_s$ für alle $t, s \geq 0$,
- **Startwert:** $\mathcal{T}_0 = \text{id}$,
- **starke Stetigkeit (auf Zuständen):** Für alle Zustände ρ ist $t \mapsto \mathcal{T}_t(\rho)$ stetig in Spur-Norm $\|\cdot\|_1$.

(In unendlichdimensionalen Systemen formuliert man die Schrödinger-Dynamik typischerweise auf den spurklassigen Operatoren und die Heisenberg-Dynamik als normale, unital CP-Halbgruppe auf $\mathcal{B}(\mathcal{H})$; Domänen-/Topologiefragen werden dann wesentlich.)
[5, 6]

Die Stetigkeitsforderung ist der operative Hebel, der aus der bloßen Verkettung $\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t \circ \mathcal{T}_s$ eine wohldefinierte infinitesimale Beschreibung macht. Ohne sie gäbe es zwar eine „Zeitparametrisierung“, aber keinen kontrollierten Übergang zu Raten und Generatoren.

²⁶Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5 „GKLS-Generatoren (offene Systeme)“.

Formelkasten IV.5.1.1: Generator und Mastergleichung

Ist $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ stark stetig, dann ist der Generator \mathcal{L} als (i. A. unbeschränkter) Operator auf dem Definitionsbereich

$$\mathcal{D}(\mathcal{L}) \equiv \left\{ \rho : \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{T}_t(\rho) - \rho}{t} \text{ existiert in } \|\cdot\|_1 \right\}$$

gegeben durch

$$\mathcal{L}(\rho) \equiv \lim_{t \downarrow 0} \frac{\mathcal{T}_t(\rho) - \rho}{t} \quad (\rho \in \mathcal{D}(\mathcal{L})).$$

Dann gilt für $\rho(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{L})$ (im geeigneten Sinn) die Mastergleichung

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}(\rho(t)), \quad \rho(t) = \mathcal{T}_t(\rho(0)).$$

[6]

Im FBA ist die in Formelkasten IV.5.1.1 formulierte „Ratenbeschreibung“ genau das, was man benötigt, um dissipative Budgetanteile als Flüsse zu interpretieren: Diskrete Budgetsummen werden zu Integralen, und irreversibles Verhalten wird als strukturelle Monotonie der zulässigen Flüsse sichtbar. Das wird später in Kapitel IV.7 mit DPI/Spohn operativ ausgewertet.

IV.5.2 GKLS-Form und ihre Entstehung

Nicht jede lineare Differentialgleichung erzeugt eine CPTP-Evolution für alle $t \geq 0$. Die eigentliche Aussage der GKLS-Struktur ist daher eine Zulässigkeitscharakterisierung: *Wenn* eine Markov-Halbgruppe in diesem Sinn existiert, dann muss ihr Generator eine ganz bestimmte Form besitzen, damit vollständige Positivität und Spurtreue dauerhaft erhalten bleiben.²⁷

Lemma IV.5.2.1: GKLS-Form (Charakterisierung zulässiger Markov-Generatoren)

Sei \mathcal{H} endlichdimensional und $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ eine stark stetige CPTP-Markov-Halbgruppe. Dann lässt sich ihr Generator \mathcal{L} in GKLS-Form schreiben:

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = \mathcal{L}(\rho(t)),$$

mit

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \sum_{k=1}^K \left(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho\} \right),$$

wobei $H = H^\dagger$ der effektive Hamiltonoperator ist, $\{A, B\} = AB + BA$ den Antikommutator bezeichnet und $\{L_k\}_{k=1}^K$ Lindblad-Operatoren sind. [4–6]

Die Form in Lemma IV.5.2.1 trennt bereits strukturell das, was im FBA als „reversibler Anteil“ und als „dissipativer Austausch“ gelesen wird: Der Kommutator ist der reversible Anteil, der Dissipator beschreibt genau die nichtunitären Beiträge, die dennoch CPTP bleiben. Damit ist GKLS nicht optional, sondern (unter den genannten Annahmen) die passende

²⁷Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5 „GKLS-Generatoren (offene Systeme)“.

Warum diese Annahmen, und was sie bedeuten

1. **CPTP als Zulässigkeit:** Ohne vollständige Positivität wäre Stabilität unter Nebenregistern nicht gesichert, und ohne Spurtreue wäre die unselektierte Buchführung nicht kontengetreu.
2. **Halbgruppe als Markov-Limes:** $\mathcal{T}_{t+s} = \mathcal{T}_t \circ \mathcal{T}_s$ ist die formale Fassung von „kein effektives Gedächtnis auf Systemebene“ nach dem gewählten Coarse-Graining (nicht: Abwesenheit mikroskopischer Korrelationen).
3. **Stetigkeit als Ratenexistenz:** Erst (starke) Stetigkeit legitimiert den Generator als wohldefinierte infinitesimale Rate.
4. **Endliche Dimension als technischer Rahmen:** In unendlichen Dimensionen treten Domänenfragen, Normalität und zusätzliche Regularitätsbedingungen hinzu; die operative Idee bleibt gleich, die mathematische Ausarbeitung ist subtiler.^a

^aSiehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5 „GKLS-Generatoren (offene Systeme)“.

Übergang. Mit Markov-Halbgruppen und GKLS-Generatoren steht die dynamische Infrastruktur. Im folgenden Kapitel IV.6 formulieren wir den kontrollierten Übergang zu semiklassischen Grenzbeschreibungen. Darauf aufbauend nutzen wir DPI und Spohn in Kapitel IV.7, um Irreversibilität als robuste Monotonieaussage für *unselektierte* Prozesse zu fassen, und um Messung, Entropieproduktion und Alterung im FBA präzise auseinanderzuhalten.

IV.6 Übergang zur Semiklassik

Die Kapitel IV.3 und IV.5 haben die dynamische Infrastruktur fixiert: diskrete Updates als CPTP, kontinuierliche Markov-Flüsse als GKLS. Wenn der FBA eine Brücke zwischen Quantenbeschreibung und klassischer Thermodynamik schlagen soll, muss nun verständlich werden, wie aus GKLS unter kontrollierten Grenzanahmen klassische Transportgleichungen und klassische Entropiebilanzen entstehen. Der Punkt ist dabei nicht, $\hbar \rightarrow 0$ als Schlagwort zu setzen, sondern zu sagen, *welche* Eigenschaften der Zustände und Raten in diesem Limes stabil bleiben und welche Information dabei bewusst coarse-grained wird.²⁸ Skalen- und Renormierungsfragen, die in solchen Übergängen unvermeidlich auftreten, sind im FBA separat gebündelt.²⁹

IV.6.1 Stetigkeitsannahmen und semiklassische Näherungen

Eine GKLS-Gleichung ist eine Gleichung für Operatoren. Der semiklassische Übergang wird erst dann operativ, wenn man die Operatorbeschreibung in eine (quasi-)klassische Zustandsbeschreibung überführt, etwa über Phasenraumdarstellungen. Unter Glattheits- und Skalenannahmen kann aus der Operator-Dynamik eine effektive Drift-/Diffusionsdynamik für Wahrscheinlichkeitsdichten werden. Die zentrale Rolle spielen dabei Stetigkeit (für den Generator) sowie die Annahme, dass relevante Zustände in der betrachteten Skala keine stark oszillatorische Quanten-Feinstruktur mehr tragen.

Definition IV.6.1.1: Semiklassischer Übergang als kontrollierter Coarse-Graining-Limes

Ein *semiklassischer Übergang* im FBA ist eine Grenzbeschreibung, in der

1. Zustände ρ durch eine Phasenraumdarstellung $W_{\hbar}[\rho]$ beschrieben werden (z. B. Wigner- oder Husimi-Darstellung), die für die betrachteten Zustandsfamilien im Limes $\hbar \rightarrow 0$ im geeigneten Sinn (z. B. schwach bzw. nach Glättung) zu einer echten Wahrscheinlichkeitsdichte f konvergiert,
2. die GKLS-Evolution $\dot{\rho} = \mathcal{L}(\rho)$ auf dieser Beschreibungsebene durch eine effektive Gleichung $\partial_t f = \mathcal{G}(f)$ approximiert wird,
3. \mathcal{G} im diffusionsdominierten Regime eine Drift-Diffusions-Form (Fokker-Planck-Typ) besitzt.

Der Limes ist damit kein Postulat, sondern eine Aussage darüber, welche Information im betrachteten Skalenfenster aufgelöst wird und welche nicht. [6, 13, 14]

²⁸Siehe FBA Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern, Abschnitte VIII.1–VIII.5 „Klassischer Limes & thermodynamische Interpretation“.

²⁹Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Abschnitte VII.1–VII.4 „Skalen, Konstanten & Renormierung“.

Welche Annahmen den Fokker–Planck–Limes tragen

Die Aussage „GKLS \rightsquigarrow Fokker–Planck“ ist keine Automatismus-Behauptung: Sie ist eine kontrollierte Näherung, die zusätzliche Regularität und ein passendes Skalenregime benötigt. Typische hinreichende Bedingungen sind:

- **Skalentrennung:** Makroskopische Observablen ändern sich langsam gegenüber den mikroskopischen Korrelationen der Umgebung (Markov-Limes).
- **Glattheit:** Relevante Zustandsfamilien sind auf der betrachteten Skala hinreichend glatt im Phasenraum, so dass eine Gradient- bzw. Kramers–Moyal-Expansion sinnvoll ist.
- **Diffusiver Limes:** Viele kleine Zufallsbeiträge addieren sich zu effektiver Diffusion (statt zu Sprungprozessen höherer Ordnung); andernfalls resultieren eher Mastergleichungen mit Sprunganteilen als reine Fokker–Planck-Formen.

Vollständige Ausarbeitungen und die thermodynamische Lesart der resultierenden Entropiebilanzen stehen an der Anschlussstelle.^a [15, 16]

^aSiehe FBA Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern, Abschnitte VIII.1–VIII.5 „Klassischer Limes & thermodynamische Interpretation“.

Formelkasten IV.6.1.1: GKLS \rightsquigarrow Drift–Diffusion auf dem Phasenraum (schematisch)

Unter diesen Annahmen kann die effektive Dynamik für eine Phasenraumdichte $f(x, t)$ oft in konservativer Form

$$\partial_t f(x, t) = -\nabla \cdot J(x, t), \quad J(x, t) = a(x) f(x, t) - \frac{1}{2} D(x) \nabla f(x, t),$$

geschrieben werden (Fokker–Planck-Typ; Konventionen für Faktoren und die genaue Platzierung von f sind modellabhängig). Dabei trägt der Drift a den reversiblen Anteil (klassischer Grenzfall des Hamiltonterms), und die Diffusionsmatrix $D(x) \succeq 0$ kodiert den dissipativen Anteil (klassischer Grenzfall geeigneter Lindblad-Terme). [15, 17]

Was im semiklassischen Limes strukturell erhalten bleibt

Damit ist der Anschluss an die FBA-Logik klar: Die Unterscheidung „reversibel vs. dissipativ“ bleibt erhalten, nur die Sprache wechselt von Operatoren zu Dichten. Auch Monotonien haben klassische Gegenstücke: DPI entspricht der Kontraktion relativer Entropie unter stochastischen (Markov-)Abbildungen, und Spohn-artige Aussagen werden (unter passenden stationären Referenzen) zu klassischen Entropieproduktionsraten im Markov-Fluss.^a [15, 16]

^aSiehe FBA Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern, Abschnitte VIII.6–VIII.8 „DPI/Spohn & thermodynamische Produktion“.

IV.6.2 Beispiele für GKLS-Prozesse

Die folgenden Beispiele dienen als Orientierung, welche physikalischen Situationen durch GKLS-Generatoren beschrieben werden und wie ihr semiklassischer Grenzfall typischerweise gelesen wird. Sie sind bewusst protokollnah gehalten: Das Ziel ist nicht, ein Spezialmodell auszureizen, sondern die Struktur „zulässige Dynamik \Rightarrow klar getrennte reversible und dissipative Beiträge“ sichtbar zu machen.

IV.6.2.1 Dekohärenz in einem Zwei-Niveausystem

Dekohärenz ist die prototypische Situation, in der ein System zwar dynamisch weiterentwickelt wird, dabei aber Phaseninformation verliert. Im GKLS-Bild erscheint das als dissipativer Term, der bestimmte Kohärenzen dämpft, ohne die Spur zu verändern.

Phasen-Dekohärenz eines Qubits (Dephasing)

Für ein Qubit mit Hamiltonoperator H und Dephasierung entlang der Pauli- z -Matrix $\sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist ein GKLS-Generator

$$\mathcal{L}(\rho) = -i[H, \rho] + \frac{\gamma}{2}(\sigma_z \rho \sigma_z - \rho), \quad \gamma \geq 0.$$

Der Hamiltonterm ist reversibel; der dissipative Term dämpft Off-Diagonaleinträge in der σ_z -Basis und modelliert den Verlust von Phaseninformation durch eine unbeobachtete Umgebung. [5, 6]

Im semiklassischen Blickwinkel entspricht der dissipative Anteil einem effektiven Rauschen, das Feinstruktur in den konjugierten Variablen verwischt. Welche klassische Drift-Diffusionsbeschreibung daraus entsteht, hängt von der gewählten Observablenfamilie und dem Skalierungsregime ab, nicht allein von der Formel für \mathcal{L} .

IV.6.2.2 Thermodynamische Prozesse in offenen Systemen

Thermodynamische Situationen entsprechen im GKLS-Rahmen typischerweise einem System, das über lange Zeiten mit einem Bad wechselwirkt. Hier ist der semiklassische Übergang besonders wichtig, weil er zeigt, wie Energieflüsse, Relaxation und Entropieproduktion als Makrogrößen aus zulässiger Mikrodynamik hervorgehen.

Ornstein-Uhlenbeck-Limes als klassischer Grenzfall (schematisch)

Ein häufiges semiklassisches Endprodukt ist eine Drift-Diffusions-Dynamik für eine makroskopische Zustandsvariable x der Form

$$\partial_t f(x, t) = \partial_x(\lambda x f(x, t)) + \frac{D}{2} \partial_x^2 f(x, t), \quad \lambda > 0, \quad D > 0,$$

die Relaxation (Drift) und Fluktuationen (Diffusion) kombiniert. In FBA-Lesart trägt der Drift den effektiven Rückstellfluss, während D die Stärke des dissipativen, irreversiblen Einflusses kodiert. [17, 18]

Die thermodynamische Auswertung (Entropieproduktion, Flüsse, stationäre Zustände und ihre Stabilität) erfolgt dann auf der Ebene der klassischen Dichte f und ist direkt an DPI/Spohn gekoppelt. Genau hier wird der Vorteil des FBA sichtbar: Die Irreversibilität wird nicht als Zusatzinterpretation eingeführt, sondern als robuste Monotoniestruktur zulässiger Prozesse gelesen.³⁰

Übergang. Nachdem der semiklassische Anschluss als kontrollierter Coarse-Graining-Limes präzisiert ist, formulieren wir im folgenden Kapitel IV.7 Irreversibilität wieder rein operativ: DPI und Spohn liefern den Pfeil für *unselektierte* Prozesse.

³⁰Siehe FBA Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern, Abschnitte VIII.6–VIII.8 „DPI/Spohn & irreversible Thermodynamik“.

IV.7 FBA und Irreversibilität

Die Kapitel IV.3 bis IV.5 haben die zulässige Dynamik so festgelegt, dass wir Irreversibilität nicht mehr als Deutung, sondern als *Strukturaussage* formulieren können: Coarse-Graining (Verwerfen von Information über Nebenregister oder Outcomes) ist ein CPTP-Schritt, und CPTP-Schritte kontrahieren Unterscheidbarkeit. Im FBA wird genau dieser Verlust an Unterscheidbarkeit als irreversibler Budgetanteil kontiert. Damit ist der „Zeitpfeil“ keine Zusatzannahme, sondern wird im Rahmen dieser Trennung zwischen unselektierten Kanälen und Post-Selection operativ sichtbar.³¹

IV.7.1 Irreversibilität aus Budgetflüssen

Im Budget-Kalkül gibt es einen Anteil, der per Definition nicht als reversible interne Uhrleistung zurückgeführt werden kann. Diese Größe ist die operative Schnittstelle zwischen „Buchführung“ und „Irreversibilität“: Solange ein Schritt vollständig reversibel ist, kann man ihn in der Beschreibung umkehren, ohne zusätzliche Kontierung in den irreversiblen Anteil zu verschieben. Sobald Information verworfen wird (Umgebung nicht aufgelöst, Outcome nicht geführt), entsteht ein positiver irreversibler Anteil.³²

Definition IV.7.1.1: Irreversibler Budgetfluss und Alterung

Der *irreversible Budgetfluss* δb_{irr} ist der Anteil eines Schrittes, der nicht als reversibler interner Fluss $\delta b_{\text{int}}^{\text{rev}}$ realisiert werden kann.

Für die Übersetzung in die Zeitsprache verwenden wir die Zeitkalibration κ_τ aus Teil II; die Notationskonventionen sind in Kapitel IV.2 gesammelt.^a Wir definieren im Kontinuum:

$$d\tau_{\text{geo}} \equiv \frac{db_{\text{int}}^{\text{rev}}}{\kappa_\tau}, \quad dA \equiv \frac{db_{\text{irr}}}{\kappa_\tau} \geq 0, \quad d\tau_{\text{tot}} = d\tau_{\text{geo}} + dA.$$

Wir bezeichnen A als *Alterungsfunktional*. (*Diskret analog*: $\Delta\tau_{\text{geo}} = \Delta b_{\text{int}}^{\text{rev}}/\kappa_\tau$, $\Delta A = \Delta b_{\text{irr}}/\kappa_\tau \geq 0$, $\Delta\tau_{\text{tot}} = \Delta\tau_{\text{geo}} + \Delta A$.)

^aSiehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.9 „Kalibration, Quadrik & Kegelstruktur“.

Damit ist die Logik klar: Um Irreversibilität belastbar zu machen, braucht man ein Kriterium, das ohne zusätzliche Interpretation sagt, wann Coarse-Graining wirklich „nicht rückgängig“ ist. Im FBA kommt dieses Kriterium aus der Datenverarbeitung: Unselektierte CPTP-Kanäle können Unterscheidbarkeit zwischen Zuständen nur reduzieren.

³¹Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5 „DPI-Pfeil, Spohn-Monotonie & No-Recovery“.

³²Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitte I.3–I.5 „Budget-Bilanz, CPTP & Messung als Coarse-Graining“.

Formelkasten IV.7.1.1: DPI als operative Irreversibilitätsaussage

Sei Φ ein CPTP-Kanal und ρ, σ zwei Zustände. Für die relative Entropie

$$S(\rho\|\sigma) \equiv \text{Tr}(\rho(\log \rho - \log \sigma))$$

(gültig für $\text{supp}(\rho) \subseteq \text{supp}(\sigma)$, sonst $S(\rho\|\sigma) = +\infty$) gilt die Datenverarbeitungs-Ungleichung (DPI)

$$S(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)) \leq S(\rho\|\sigma).$$

Die Differenz

$$\Delta_{\Phi}(\rho, \sigma) \equiv S(\rho\|\sigma) - S(\Phi(\rho)\|\Phi(\sigma)) \geq 0$$

ist das (paarabhängige) *Kontraktionsdefizit* der relativen Entropie unter Φ und quantifiziert operativ den Verlust an Unterscheidbarkeit zwischen den Hypothesen ρ und σ . [3, 7, 8]

Was DPI hier bedeutet (ohne Thermodynamik vorauszusetzen)

Die DPI-Aussage ist bewusst nicht thermodynamisch aufgeladen: Sie sagt zuerst nur, was in Protokollen überprüfbar ist – nämlich ob zwei Präparationen nach einem zulässigen, *unselektierten* Schritt schlechter unterscheidbar sind. Eine thermodynamische Lesart entsteht erst, wenn man σ als geeignete Referenz (z. B. stationärer Zustand oder Gibbs-Referenz in einem Modell) wählt. Dann kann der Informationsverlust als Produktion interpretiert werden. Genau an dieser Stelle liefert Spohn für GKLS-Flüsse eine Ratenform dieser Monotonie (unter den jeweils nötigen Regularitäts-/Stationaritätsannahmen). [6, 9]

IV.7.2 Thermodynamische Konsequenzen

Thermodynamik beginnt hier nicht mit Wärme und Arbeit, sondern mit einer robusten Monotonie: Für Markov-Flüsse ist der Informationsverlust nicht nur global (DPI), sondern besitzt eine lokale Ratenform, sobald die zeitliche Ableitung wohldefiniert ist. Das ist genau die Struktur, die man benötigt, um „Entropieproduktion“ im Sinn eines zweiten Hauptsatzes zu fassen, ohne Post-Selection einzubauen.

Formelkasten IV.7.2.1: Spohn-Monotonie und Entropieproduktionsrate

Sei $\{\mathcal{T}_t\}_{t \geq 0}$ eine CPTP-Markov-Halbgruppe (im endlichdimensionalen oder normstetigen GKLS-Setting) und σ ein stationärer Zustand, d. h. $\mathcal{T}_t(\sigma) = \sigma$ für alle $t \geq 0$. Dann ist $t \mapsto S(\rho_t \parallel \sigma)$ monoton fallend, wobei $\rho_t = \mathcal{T}_t(\rho_0)$. Falls $t \mapsto S(\rho_t \parallel \sigma)$ differenzierbar ist, gilt (Spohn)

$$\frac{d}{dt} S(\rho_t \parallel \sigma) \leq 0.$$

Damit ist die Entropieproduktionsrate

$$\dot{\Sigma}(t) \equiv -\frac{d}{dt} S(\rho_t \parallel \sigma) \geq 0$$

nichtnegativ. Insbesondere gilt $\dot{\Sigma}(t) = 0$, wenn $\rho_t = \sigma$ (stationärer Verlauf); weitere Gleichheitsbedingungen sind modell- bzw. generatorabhängig. [6, 9]

Warum Spohn im FBA die Brücke zur Buchführung ist

Im FBA ist der praktische Nutzen dieser Aussage zweifach:

- **Unselektiert vs. selektiv:** Spohn (wie DPI) bezieht sich auf *unselektierte* Dynamik. Selektive Updates sind CP und spur-nicht-erhöhend; durch Konditionierung können sie scheinbar „Entropie senken“, benutzen aber immer ein Outcome-Register und gehören damit nicht in dieselbe unselektierte Bilanzlogik (vgl. Abschnitt IV.4.1).
- **Anschluss an den irreversiblen Budgetanteil:** Wenn der Prozess auf Systemebene Unterscheidbarkeit vernichtet, ist das im FBA genau der Anteil, der als irreversibler Budgetfluss dA kontiert wird. Die thermodynamische Kalibrierung dieser Zuordnung (Skalen, k_B , konkrete Flüsse) wird in Teil VIII präzisiert.^a

^aSiehe FBA Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern, Abschnitte VIII.6–VIII.8 „DPI/Spohn & thermodynamische Produktion“.

Was hier schon folgt, und was bewusst ausgelagert ist

- **Hier folgt:** Irreversibilität ist für unselektierte Dynamik eine Monotonieaussage (DPI/Spohn) und damit protokollfest. Coarse-Graining ist die strukturelle Quelle dieser Monotonie.
- **Hier nicht ausgeschrieben:** Die Identifikation von $\dot{\Sigma}$ mit klassischen Größen wie Wärmefluss und Entropiebilanz erfordert zusätzliche Modellannahmen (Bäder, stationäre Referenzen, Skalenlimes). Genau diese Übersetzung wird im klassischen Limes und in der Thermodynamik-Abhandlung ausgearbeitet.^a
- **Konsequenz für Teil IV:** Sobald wir in konkreten Modellen Messung, Umgebung und unselektierte Updates sauber trennen, ist „kein Anti-Irreversibilitäts-Trick“ mehr möglich: Eine echte Verletzung von DPI/Spohn wäre ein direkter Fail der Zulässigkeitsannahmen, nicht nur ein Interpretationsstreit.

^aSiehe FBA Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern, Abschnitte VIII.1–VIII.5 „Klassischer Limes & thermodynamische Struktur“.

Damit ist die Rolle von Irreversibilität im FBA für offene Systeme präzisiert: Sie ist ein kontrollierter Effekt der zulässigen Prozessklasse unter Coarse-Graining, und sie erscheint gleichzeitig als irreversibler Budgetanteil dA in der Buchführung. Im Schlusskapitel werden wir diese Struktur in eine kompakte Pass/Fail-Form bringen und die Anschlussstellen zu Thermodynamik und Gravitation markieren.

IV.8 Schlussfolgerungen

Diese Abhandlung hatte ein klares Ziel: Dynamik, Messung und Irreversibilität sollen im FBA nicht als getrennte Kapitel einer Interpretation erscheinen, sondern als Konsequenzen derselben Zulässigkeitsklasse, die unter Komposition, Nebenregistern und Coarse-Graining stabil ist. Genau dadurch wird verständlich, warum CPTP, GKLS und DPI/Spohn hier keine austauschbaren „Modelle“ sind, sondern die strukturell passenden Objekte, sobald man offene Systeme operativ ernst nimmt.

IV.8.1 Zusammenfassung der Hauptergebnisse

Was hier feststeht, wenn man CPTP als Zulässigkeit akzeptiert

- **Messung ist kein Sonderfall.** Eine Messung ist eine CP-Zerlegung eines CPTP-Schrittes, also ein Instrument mit Outcome-Register und Zustandsupdate (Definition IV.4.1.1 und Lemma IV.4.1.1). Die POVM ist die vom Instrument induzierte Effektfamilie, und die Born-Kopplung bleibt die konsistente Statistikformel.
- **Coarse-Graining ist der operative Ursprung von Irreversibilität.** Unselektierte Messung ist ein CPTP-Coarse-Graining; dadurch wird Unterscheidbarkeit zwischen Präparationen reduziert. Genau diese Aussage wird als DPI formuliert (Formelkästen IV.4.3.1 und IV.7.1.1).
- **Der Markov-Limes ist eine kontrollierte Grenzbeschreibung.** Wenn die effektive Dynamik speicherlos und stetig ist, trägt sie eine Halbgruppenstruktur und besitzt einen Generator (Definition IV.5.1.1 und Formelkasten IV.5.1.1).
- **GKLS ist die zulässige Generatorform im Kontinuum.** Die GKLS-Form charakterisiert Generatoren, die CPTP im Halbgruppenfluss erhalten (Lemma IV.5.2.1).
- **Spohn macht DPI zu einer Ratenform.** Für GKLS-Flüsse ist die Abnahme relativer Entropie gegenüber einer stationären Referenz eine lokale Monotonie, und die Entropieproduktionsrate ist nichtnegativ (Formelkasten IV.7.2.1).

Kapitel IV.6 ordnet diese Struktur zusätzlich ein: Es zeigt, unter welchen Glattheits- und Skalenannahmen GKLS-Dynamik in Drift-Diffusions-Gleichungen (Fokker-Planck-Typ) übergehen kann, und warum dieser Schritt ein kontrolliertes Coarse-Graining ist, nicht eine rein formale Ersetzung $\hbar \rightarrow 0$.

IV.8.2 Ausblick auf andere Teile der FBA-Reihe

Der nächste Fortschritt ergibt sich nicht durch mehr Formalismus, sondern durch zwei gezielte Anschlussstellen: erstens die *lokale* Struktur (Feld-/Kausalitätssprache), zweitens die *thermodynamische* Übersetzung (Skalen, Flüsse, Produktion). Beides ist in der Reihe bewusst ausgelagert, damit die Deduktionslinie hier nicht zerfasert.

Pfadbarte: Wo die Ergebnisse weiter ausgebaut werden

- **Kausalität, Lokalität, Feldstruktur.** Die in Teil II kalibrierte Lichtkegel-/Frontstruktur liefert die Referenzkausalität.^a Teil V baut darauf lokale Generatoren, Mikrokausalität und Kontinuitätsgleichungen auf.^b
- **Gravitation als Abweichung vom flachen Limes.** Wenn Budgets inhomogen werden, erscheint Rückwirkung als effektive Geometrie; das wird in Teil VI im Kontinuum ausgearbeitet.^c
- **Thermodynamik, Altern, Entropieproduktion.** Die hier verwendete DPI/Spohn-Struktur wird in Teil VIII in klassische Größen (Flüsse, stationäre Zustände, Produktion) übersetzt, inklusive der Rolle irreversibler Anteile als Alterung.^d
- **Skalen und Renormierung.** Sobald man konkrete Modelle vergleicht, muss geklärt werden, welche Skalen konventionsabhängig sind und welche invariant bleiben; das ist im FBA eigenständig in Teil VII gebündelt.^e
- **Tests und Pass/Fail-Kriterien.** Die Reihe endet nicht bei „Erklärungen“, sondern bei Protokollen. Ein konsolidierter Katalog, welche Beobachtungen CPT-P/GKLS/DPI im FBA tragen oder widerlegen, steht in Teil X.^f

^aSiehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.9 „Kalibration, Quadrik & Kegelstruktur“.

^bSiehe FBA Teil V: Raumzeit, Lichtkegel & lokale Feldtheorie, Abschnitte V.3–V.6 „Lichtkegel, Mikrokausalität & lokale Dynamik“.

^cSiehe FBA Teil VI: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen, Abschnitte VI.1–VI.5 „Geometrie/Gravitation aus Budgetflüssen“.

^dSiehe FBA Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern, Abschnitte VIII.6–VIII.8 „DPI/Spohn & Altersmaß“.

^eSiehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Abschnitte VII.1–VII.4 „Skalen, Konstanten & Renormierung“.

^fSiehe FBA Teil X: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA → QM ↔ ART, Abschnitte X.6–X.8 „Vorhersagen, Tests & Vergleich“.

Damit ist die Rolle dieser Abhandlung im Gesamtbogen eindeutig: Wir haben die dynamische und messtheoretische Infrastruktur so fixiert, dass Irreversibilität als robuste Monotonie unselektierter Prozesse formuliert werden kann. Alles, was danach kommt – lokale Felddichten, thermodynamische Flüsse oder gravitative Rückwirkung – baut auf genau dieser Stabilität unter Komposition und Coarse-Graining auf.

IV.9 Anhang: Überblick über die FBA-Reihe (Teile I–X)

Klick auf den Titel zum Download des PDF

1. **Teil I: FBA-Grundlagen: Abfolge, Budget, Eigenzeit & Pfeile.** *Ziel:* Basisschicht bereitstellen: Abfolge, Budget, Eigenzeit/Alterung, Front und operativer Zeitpfeil (DPI); Minkowski-Limes aus der Budget-Quadrik; zulässige Dynamik und Lokalität/No-Signalling. *Import:* – (Referenz für alle Folgeteile). *Erweiterung:* Schnittstellenverträge, Pass/Fail-Checklisten, Lesefaden.
2. **Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie.** *Ziel:* Eigenzeit/Quadrik operativ fassen und Geodäten ableiten. *Import:* Grundlagen (Abfolge, Budget, Eigenzeit, Front/DPI). *Erweiterung:* glatter Limes, Variationsprinzip auf Weltlinien, Kalibration κ_τ .
3. **Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle.** *Ziel:* Zustandsräume und Kanäle (CPTP) samt Komposition. *Import:* Grundlagen (Budget, Kanalsicht, Komposition). *Erweiterung:* konkrete Divergenzen/Kostenfunktoren \mathcal{C} , Messungen und Klassik-Register.
4. **Teil IV: Dynamik, Messung & GKLS (offene Systeme).** *Ziel:* Kontinuierliche offene Dynamik (GKLS) und operativer Zeitpfeil. *Import:* Kanäle/DPI. *Erweiterung:* Spohn-Monotonie, stationäre/NESS-Referenzen, Flüsse $b^{\text{rev}}, b^{\text{irr}}, b^{\text{ext}}$.
5. **Teil V: Raumzeit, Lichtkegel & lokale Feldtheorie.** *Ziel:* Lokale Feldgleichungen unter Front/Lokalität. *Import:* Front, Komposition, No-Signalling. *Erweiterung:* lokale GKLS-Generatoren, Lieb–Robinson-artige Schranken, effektive Lichtkegel.
6. **Teil VI: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen.** *Ziel:* Geometrisierung von Budgetflüssen. *Import:* Budget-Quadrik/Eigenzeit. *Erweiterung:* effektive Metriken aus Kalibrationen (κ_t, κ_x) und internen Spannungen; Kopplung an Krümmung.
7. **Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung.** *Ziel:* Skalenführung der Kalibrationssätze. *Import:* $c = \kappa_t/\kappa_x, \kappa_\tau$. *Erweiterung:* Flow-Gleichungen für $\kappa_t, \kappa_x, \kappa_\tau$; Stabilität von c .
8. **Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern.** *Ziel:* Makroskopik aus $A[\gamma]$ (Alterung) und DPI. *Import:* Eigenzeit/Alterung, Spohn. *Erweiterung:* Entropieproduktion, Euler–Lagrange-Formen für irreversible Flüsse, effektive Transportgleichungen.
9. **Teil IX: Kosmische Dynamik, Time Dilation & Inflation (TDI).** *Ziel:* Kosmische Abfolge & Kalibrationsfluss. *Import:* Budget, Eigenzeit/Front. *Erweiterung:* Budgetgleichungen auf großskaligen Slices; Time-Dilation-Inflation als Kalibrationsdynamik.
10. **Teil X: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA \rightarrow QM \leftrightarrow ART.** *Ziel:* Testbare Differenzen und Brücken FBA \leftrightarrow QM/ART. *Import:* alle Grundlagenbausteine. *Erweiterung:* Protokolle, Grenzfalltests, überbestimmte Konsistenzrelationen (Pass/Fail).

Literatur

- [1] E. B. Davies und J. T. Lewis. „An Operational Approach to Quantum Probability“. In: *Communications in Mathematical Physics* 17 (1970), S. 239–260. DOI: 10.1007/BF01647093.
- [2] A. S. Holevo. *Quantum Systems, Channels, Information. A Mathematical Introduction*. Berlin, Boston: De Gruyter, 2012. DOI: 10.1515/9783110273403.
- [3] M. A. Nielsen und I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information. 10th Anniversary Edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN: 9781107002173.
- [4] V. Gorini, A. Kossakowski und E. C. G. Sudarshan. „Completely Positive Dynamical Semigroups of N -Level Systems“. In: *Journal of Mathematical Physics* 17.5 (1976), S. 821–825. DOI: 10.1063/1.522979.
- [5] G. Lindblad. „On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups“. In: *Communications in Mathematical Physics* 48.2 (1976), S. 119–130. DOI: 10.1007/BF01608499.
- [6] H.-P. Breuer und F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford: Oxford University Press, 2002. ISBN: 9780199213900.
- [7] G. Lindblad. „Completely Positive Maps and Entropy Inequalities“. In: *Communications in Mathematical Physics* 40.2 (1975), S. 147–151. DOI: 10.1007/BF01609396.
- [8] D. Petz. „Sufficient Subalgebras and the Relative Entropy of States of a von Neumann Algebra“. In: *Communications in Mathematical Physics* 105.1 (1986), S. 123–131. DOI: 10.1007/BF01212345.
- [9] H. Spohn. „Entropy Production for Quantum Dynamical Semigroups“. In: *Journal of Mathematical Physics* 19.5 (1978), S. 1227–1230. DOI: 10.1063/1.523789.
- [10] W. F. Stinespring. „Positive Functions on C^* -Algebras“. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 6.2 (1955), S. 211–216. DOI: 10.2307/2032342.
- [11] K. Kraus. *States, Effects, and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*. Bd. 190. Lecture Notes in Physics. Berlin, Heidelberg: Springer, 1983. DOI: 10.1007/3-540-12732-1.
- [12] K. Kraus. „General State Changes in Quantum Theory“. In: *Annals of Physics* 64.2 (1971), S. 311–335. DOI: 10.1016/0003-4916(71)90108-4.
- [13] E. Wigner. „On the Quantum Correction For Thermodynamic Equilibrium“. In: *Physical Review* 40.5 (1932), S. 749–759. DOI: 10.1103/PhysRev.40.749.
- [14] J. E. Moyal. „Quantum Mechanics as a Statistical Theory“. In: *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 45 (1949), S. 99–124. DOI: 10.1017/S0305004100000487.
- [15] N. G. van Kampen. *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*. 3. Aufl. Amsterdam: Elsevier, 2007. DOI: 10.1016/B978-0-444-52965-7.X5000-4.
- [16] C. W. Gardiner. *Stochastic Methods: A Handbook for the Natural and Social Sciences*. 4. Aufl. Berlin, Heidelberg: Springer, 2009. ISBN: 9783540707127.
- [17] H. Risken. *The Fokker–Planck Equation: Methods of Solution and Applications*. 2. Aufl. Berlin: Springer, 1996. DOI: 10.1007/978-3-642-61544-3.
- [18] G. E. Uhlenbeck und L. S. Ornstein. „On the Theory of the Brownian Motion“. In: *Physical Review* 36.5 (1930), S. 823–841. DOI: 10.1103/PhysRev.36.823.