

Der Frame–Budget–Ansatz (FBA)  
Wie Zeit, Dynamik und Geometrie aus Budgetflüssen entstehen  
*Eine operative Brücke* zwischen Quantenmechanik und Allgemeiner Relativitätstheorie

**Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle**

Dipl. Wirt.-Inf. Jens Tetzner

21. Januar 2026

## Inhaltsverzeichnis

<b>III</b>	<b>Quantenkinematik &amp; CPTP-Kanäle</b>	<b>2</b>
III.1	Einleitung & Zielbild	2
III.2	Vorangestellte Grundlagen & Konventionen (Import aus Teil I: FBA - Grundlagen)	5
III.3	Von Frames zu Zuständen: Der Übergang zur Quantenkinematik	7
III.4	CPTP-Kanäle und die Dynamik aus dem FBA	11
III.5	Der Hilbertraum-Formalismus aus dem FBA	15
III.6	Vergleich mit der Standard-QM-Kinematik	19
III.7	Zusammenfassung und Ausblick	22
III.8	Anhang: Überblick über die FBA-Reihe (Teile I–X)	25

## Teil III

# Quantenkinematik & CPTP-Kanäle

## III.1 Einleitung & Zielbild

### III.1.1 Motivation

Teil II hat im flachen Limes die metrologische und kausale Bühne des FBA<sup>1</sup> fixiert: Zeit als Ordnung, Eigenzeit als interner Budgetfluss und die Lichtkegelstruktur aus Front-Kalibration.<sup>2</sup> Auf dieser Bühne stellt sich nun die nächste, operative Frage: Wie beschreibt man *Prozesse* so, dass Komposition, No-Signalling und Budgettreue erhalten bleiben, und zwar ohne den Hilbertraum-Formalismus als Axiom vorauszusetzen? Die Antwort dieses Teils ist kinematisch: Zustände werden als Dichteoperatoren und Messungen als POVMs (Effekte als Elemente) rekonstruiert, weil genau diese Objekte die minimalen, laborrelevanten Anforderungen erfüllen, die aus der FBA-Kompositionslogik folgen.<sup>3</sup>[1, 2] Dynamik erscheint dann als Klasse zulässiger Transformationen, nämlich CPTP-Kanäle, weil sie Positivität, Normierung und Funktorialität unter serieller und paralleler Komposition stabil halten.[1, 3, 4]

### III.1.2 Zielbild

Am Ende dieses Teils sollen drei Dinge gleichzeitig klar sein: (1) warum die kinematische Sprache  $\rho$  und POVM nicht ein Postulat ist, sondern eine konsequente Verdichtung operativer Daten, (2) warum *zulässige* Prozessklassen natürlich bei CPTP landen, und (3) wie der übliche Hilbertraum-Formalismus als *Darstellung* dieser Kinematik wiedergewonnen wird, statt als Ausgangspunkt zu dienen. Die dynamische Ausarbeitung als kontinuierlicher Fluss (GKLS) und Messung als kontengetreues Coarse-Graining wird anschließend in Teil IV vertieft.<sup>4</sup>

### III.1.3 Logikpfad

1. *Von Frames zu Zuständen.* Wir brauchen zuerst ein Objekt, das Präparationen so repräsentiert, dass es unter Refinement und Zusammensetzung stabil bleibt. Die Wahl fällt auf Dichteoperatoren, weil sie genau die richtige Struktur besitzen, um Mischungen, Marginalisierung und Vergleichsprotokolle konsistent abzubilden (operativer Kern: Konvexität und Positivität).[1, 2]
2. *Messung als Effektbeschreibung.* Sobald Zustände als Vorhersageobjekte feststehen, müssen Messprotokolle als Abbildungen auf Wahrscheinlichkeiten modelliert werden, ohne eine spezielle Basis zu bevorzugen. Das leistet die POVM-Sprache, weil sie (i) Positivität der Ereignisse garantiert und (ii) eine vollständige Normalisierung der Ausgänge sicherstellt.[1, 2] Damit sind „Messwerte“ nicht mehr zusätzliche Postulate, sondern Teil derselben Kinematik.

---

<sup>1</sup>Ein Überblick über alle Teile der FBA-Abhandlung inklusive Downloadlinks findet sich in Kapitel III.8 dieses Dokuments.

<sup>2</sup>Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.3–II.9.

<sup>3</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitte I.5–I.6.

<sup>4</sup>Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.3–IV.6.

3. *Prozessklassen.* Der entscheidende Schritt ist nicht die Einführung von „Dynamik“, sondern die Einschränkung auf Transformationen, die die Kinematik unter zulässigen Operationen schließen. CPTP ist hier die minimale Forderung, die Positivität und Normierung auch unter Erweiterung durch Nebenregister und unter Komposition stabil hält.<sup>5</sup>. [1, 3, 4]
4. *Wahrscheinlichkeiten und Born-Konsistenz.* Mit Zuständen und Effekten ist die Born-Regel keine zusätzliche Hypothese, sondern die kanonische lineare Paarung, die Komposition, Normalisierung und Operationalität kompatibel macht. [1, 2] Ihre Rolle ist damit die eines Konsistenzsatzes: Sie übersetzt die Kinematik in überprüfbare Häufigkeiten.
5. *Hilbertraum-Formalismus als Darstellung.* Abschließend zeigen wir, wie sich aus dieser operativen Kinematik die gewohnte Hilbertraum-Sprache rekonstruieren lässt, inklusive der bekannten Operatorrepräsentationen. Der formale Mehrwert ist, dass klar bleibt, welche Teile „Repräsentationswahl“ sind und welche Teile bereits auf der operativen Ebene festliegen.

### III.1.4 Scope und Abgrenzung

Wir arbeiten kinematisch und flach: keine Krümmung, keine Backreaction. Zulässige Prozesse werden als CPTP gefasst; Markov- und Stetigkeitsannahmen, die für kontinuierliche Generatoren nötig sind, werden hier nur vorbereitet und in Teil IV systematisch eingesetzt.<sup>6</sup> Die relativistische Metrologie von  $c$  und die Eigenzeit-Struktur werden als bereits fixierte Referenz aus Teil II verwendet, nicht erneut hergeleitet.<sup>7</sup>

### III.1.5 Beitrag gegenüber Standard-QM

Standard-QM startet typischerweise mit Hilberträumen, Observablen und einem Messpostulat. Hier ist die Richtung umgekehrt: Wir beginnen mit den FBA-Primitiven und der Schließung unter zulässiger Komposition und zeigen, dass genau die bekannten QM-Objekte als stabile Repräsentation dieser operativen Struktur auftreten.<sup>8</sup> Der zusätzliche Gewinn ist, dass „Zulässigkeit“ nicht nur mathematisch (CPTP), sondern zugleich bilanz- und informationskompatibel gefasst wird, was später bei Messung, Irreversibilität und Skalenfragen als harte Leitplanke dient.<sup>9</sup>

### III.1.6 Lesefaden

**Kapitel III.2 - Grundlagen & Konventionen:** Wir importieren genau die Bausteine, die wir für Kinematik und Schließungskriterien brauchen (Komposition, No-Signalling, Budgettreue) und leiten daraus die zulässigen Prozessklassen her. *Warum zuerst?* Weil ohne diese Schließungskriterien nicht klar ist, welche Formalismen überhaupt als zulässig gelten.<sup>10</sup>

---

<sup>5</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.5.

<sup>6</sup>Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.3–IV.5.

<sup>7</sup>Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.8.

<sup>8</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitte I.5–I.7.

<sup>9</sup>Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitt IV.7.

<sup>10</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitte I.5–I.6.

**Kapitel III.3 - Von Frames zu Zuständen:** Rekonstruktion von Zuständen als operative Verdichtung von Präparationen. *Warum hier?* Weil jede Aussage über Messung oder Dynamik eine Zustandsrepräsentation voraussetzt.

**Kapitel III.4 - CPTP-Kanäle und Dynamik aus dem FBA:** Zulässige Transformationen als CPTP und ihre strukturellen Konsequenzen. *Warum jetzt?* Weil Prozessklassen feststehen müssen, bevor Wahrscheinlichkeiten und Darstellungen sinnvoll eingeordnet werden können.

**Kapitel III.5 - Hilbertraum-Formalismus aus dem FBA:** Darstellungssätze und Born-Konsistenz in der üblichen Operator-Sprache. *Warum zuletzt im Kernteil?* Damit klar bleibt, was aus der operativen Struktur folgt und was reine Repräsentation ist.

**Kapitel III.6 - Vergleich und Einordnung:** Abgleich mit Standard-QM und Interpretation der Gleichheiten und Unterschiede. *Ziel:* Der Leser soll erkennen, an welcher Stelle der FBA dieselben Vorhersagen liefert und an welcher Stelle zusätzliche, testrelevante Struktur entsteht.

**Kapitel III.7 - Zusammenfassung & Ausblick:** Einordnung der offenen Punkte und der Übergang zu Dynamik, Messung und GKLS in Teil IV.<sup>11</sup>

---

<sup>11</sup>Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.1–IV.6.

## III.2 Vorangestellte Grundlagen & Konventionen (Import aus Teil I: FBA - Grundlagen)

*Warum ein Import?* In Teil III wollen wir Quantenkinematik nicht als Hilbertraum-Postulat einführen, sondern als stabile Repräsentation operativer Strukturen lesen: Präparationen müssen sich mischen lassen, Messprotokolle müssen Wahrscheinlichkeiten liefern, und Prozessklassen müssen unter serieller und paralleler Komposition geschlossen bleiben. Genau diese Minimalforderungen sind in Teil I bereits so formuliert, dass sie mit Budgettreue, Lokalität und No-Signalling kompatibel sind. Wir übernehmen die Bausteine hier unverändert, damit die folgenden Kapitel direkt *arbeiten* können: Kapitel III.3 rekonstruiert Zustände und Effekte, Kapitel III.4 schließt die Dynamik auf CPTP, und Kapitel III.5 ordnet Born-Struktur und Darstellungssätze ein. Details und Vollbeweise bleiben in Teil I, damit der Lesepfad hier nicht in Begründungswiederholungen zerfällt.

### Importierte Bausteine (unverändert).

- **Abfolge globaler Zustände & Minimalereignisse:** Frame-Abfolge, Minimalereignis sowie Koaktualität und Refinement-Invarianz <sup>(a)</sup>.
- **Differenzfunktion & operative Minimaldifferenz:** Operatives Differenzmaß als Grundlage für Refinement-stabile Ordnungen <sup>(b)</sup>.
- **Budget-Kalkül (intern/extern/irreversibel) & Bilanz:** Ein-Schritt-Budget, Bilanzgleichungen und Refinement-Invarianz <sup>(c)</sup>.
- **Externe Kalibration & Front:** Kalibration, Frontschränke und Signalfont <sup>(d)</sup>.
- **Eigenzeit & Altern, Minkowski-Limes:** Eigenzeit, Alterung, Quadrik und Zeitdilatation als Referenzlimes <sup>(e)</sup>.
- **Zulässige Dynamik (CPTP/GKLS), DPI/Spohn:** Admissible Channels (CPTP), Kraus/Stinespring, Messung als CPTP, GKLS-Generatoren, Spohn-Monotonie, Semigroup - Budget, DPI-Pfeil und No-Recovery <sup>(f)</sup>.
- **Komposition, Lokalität & No-Signalling:** Symmetrisch-monoidale Struktur, Budget-Additivität, No-Wire-Inflation und lokale Operationen, Kausalkegel und lokale GKLS <sup>(g)</sup>.

---

<sup>a</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.2.

<sup>b</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.2.

<sup>c</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.3.

<sup>d</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.3.

<sup>e</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.4.

<sup>f</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.5.

<sup>g</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.6.

*Wozu genau werden diese Bausteine in Teil III gebraucht?* Die Kinematikseite (Zustände, Effekte, Mischungen, Marginalisierung) braucht Refinement-Stabilität und Komposition. Die Prozessseite braucht eine Klasse zulässiger Maps, die Positivität und Normierung auch unter Erweiterung durch Nebenregister und unter Verkettung erhält – genau hier führt die Schließung natürlich zu CPTP. Und die Brücke zur späteren Dynamik (GKLS, DPI/Spohn) ist wichtig, weil die in Teil III eingeführten Objekte in Teil IV als kontinuierliche, lokal

unterstützte Flüsse weitergeführt werden.

### Notation & Konventionen

- **Diskret vs. Kontinuum:** Schrittindex  $n \in \mathbb{Z}$  für aufeinanderfolgende Frames;  $\Delta(\cdot)$  für diskrete Inkremente,  $d(\cdot)$  für differentielle Größen im Limes.
- **Budget-Zerlegung:** Pro Schritt  $\delta b_{\text{int}}, \delta b_{\text{ext}}, \delta b_{\text{irr}}$  (intern/extern/irreversibel); Pfadintegrale  $\sum \delta(\cdot)$  bzw.  $\int d(\cdot)$ . Wir behalten die Zeitkalibration  $\kappa_\tau$  aus Teil II explizit:

$$d\tau_{\text{geo}} \equiv \frac{db_{\text{int}}^{\text{rev}}}{\kappa_\tau}, \quad dA \equiv \frac{db_{\text{irr}}}{\kappa_\tau} \geq 0, \quad d\tau_{\text{tot}} = d\tau_{\text{geo}} + dA.$$

(Diskret analog:  $\Delta\tau_{\text{geo}} = \Delta b_{\text{int}}^{\text{rev}}/\kappa_\tau$ ,  $\Delta A = \Delta b_{\text{irr}}/\kappa_\tau$ .)

- **Kalibration:**  $c$  ist die *Kalibrationskonstante* der schnellsten zulässigen Fronten (metrologisch fixiert). Einheitenwahl erfolgt über das definierte Front-Protokoll.
- **Raumzeit-Sprache (Referenz aus Teil II, flach, kinematisch):** Vierervektor  $x^\mu = (ct, x, y, z)$ ; Minkowski-Signatur  $\eta = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ ; Lichtkegel durch  $\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = 0$ . Diese Notation dient in Teil III als Referenz für Kausalität und Lokalität, nicht als zusätzliche Annahme.
- **Hilberträume, Zustände, Effekte:** Hilbertraum eines Systems  $S$ :  $\mathcal{H}_S$ . Zustände  $\rho$  sind Dichteoperatoren:  $\rho \geq 0$ ,  $\text{Tr}(\rho) = 1$ . Effekte  $E$  erfüllen  $0 \leq E \leq \mathbb{I}$ . POVM  $\{E_i\}_i$ :  $E_i \geq 0$ ,  $\sum_i E_i = \mathbb{I}$ . Born-Wahrscheinlichkeit:  $p(i) = \text{Tr}(\rho E_i)$ . [1, 2]
- **Kanäle (CPTP) und Kraus-Form:** CPTP-Kanal  $\mathcal{E}$  wirkt auf Zustände als  $\rho \mapsto \mathcal{E}(\rho)$ . Kraus-Darstellung:  $\mathcal{E}(\rho) = \sum_k K_k \rho K_k^\dagger$  mit  $\sum_k K_k^\dagger K_k = \mathbb{I}$ . Partielle Spur:  $\rho_S = \text{Tr}_E(\rho_{SE})$ . Serielle Komposition  $\circ$ , parallele Komposition  $\otimes$ . [1, 3, 4]
- **Dynamik (Vorschau, GKLS):** Generator  $\mathcal{L}$  mit  $d\rho/dt = \mathcal{L}(\rho)$  im Markov-Limes; konkrete GKLS-Form wird in Teil IV verwendet. [5–7]
- **Entropien und DPI/Spohn (wo benötigt):** Quantenrelative Entropie  $S(\rho\|\sigma)$ ; DPI:  $S(\mathcal{E}(\rho)\|\mathcal{E}(\sigma)) \leq S(\rho\|\sigma)$  für CPTP  $\mathcal{E}$ . Spohn-Monotonie wird als operative Monotoniestruktur für irreversible Anteile genutzt. [2, 8, 9]
- **Weltlinien & Pfade:**  $\gamma$  bezeichnet eine Weltlinie eines Systems durch die Frame-Abfolge; Konkatenation  $\Gamma = \Gamma_1 \circ \Gamma_2$ ; Additivität aller integrierten Budgets entlang  $\Gamma$ .
- **Zeichenkonventionen:** Norm  $\|\cdot\|$  (je nach Kontext operatornormartig oder euklidisch, stets explizit); Erwartungswert  $\mathbb{E}[\cdot]$ ; Supremum  $\sup$ ;  $c$  bleibt explizit (keine  $c = 1$ -Einheiten in dieser Abhandlung).

*Konsequenz:* Mit diesen Importen und Konventionen können wir in Kapitel III.3 unmittelbar Zustände und Effekte als operative Objekte formulieren, und in Kapitel III.4 die zulässigen Prozessklassen so einschränken, dass Positivität, Normalisierung und Lokalität unter Komposition automatisch erhalten bleiben.

### III.3 Von Frames zu Zuständen: Der Übergang zur Quantenkinematik

Teil I liefert die operativen Bausteine, mit denen wir nun eine Quantenkinematik als *stabile Beschreibung von Präparationen, Messungen und zulässigen Transformationen* formulieren: Komposition und No-Signalling verhindern, dass „globale“ Informationen durch lokale Eingriffe künstlich erzeugt werden, und Refinement-Invarianz stellt sicher, dass eine feinere Beschreibung keine neue Physik hineinträgt.<sup>12</sup> Für die Kinematik heißt das: Wir brauchen ein Zustandsobjekt, das (i) Mischungen von Präparationen abbildet, (ii) unter Coarse-Graining konsistent bleibt und (iii) Wahrscheinlichkeiten für Messausgänge liefert, ohne eine spezielle Koordinatenwahl zu bevorzugen. Genau dafür sind Dichteoperatoren und POVMs die geeignete Sprache.[1, 2]

Wichtig ist die Richtung der Argumentation: Wir *starten* nicht mit dem Hilbertraum als Postulat, sondern mit einem operativen Äquivalenzbegriff. Der Hilbertraum erscheint im Verlauf als die Standarddarstellung, in der diese operative Struktur besonders kompakt wird.

#### III.3.1 Zustände als operative Äquivalenzklassen und ihre Darstellung als Dichteoperatoren

Ein globaler Frame enthält im FBA eine vollständige Systemwelt. Ein Beobachter greift davon jedoch nur auf einen Teil zu, nämlich auf die durch seine zulässigen Operationen und Ausleseprotokolle definierte Schnittstelle. Zwei Präparationen sind deshalb genau dann „derselbe Zustand“, wenn sie in allen zulässigen Messprotokollen dieselben Häufigkeiten erzeugen.

##### Definition III.3.1.1: Operativer Zustand (Präparationsäquivalenz)

Eine *Präparation*  $P$  eines Systems  $S$  ist eine Prozedur, die in einem Frame eine Wiederholserie erzeugt. Zwei Präparationen  $P \sim P'$  heißen *äquivalent*, wenn sie für jede zulässige Messung  $M$  dieselbe Outcome-Verteilung liefern. Ein *Zustand* von  $S$  ist eine Äquivalenzklasse  $[P]$  unter dieser Relation.

Diese Definition ist bewusst formalarm: Sie bindet den Zustand direkt an das, was experimentell stabil ist, nämlich Statistiken. Damit ist auch klar, warum Zustände konvex sein müssen: Man kann Präparationen randomisiert mischen, und die resultierenden Häufigkeiten sind lineare Mischungen. Eine Darstellung, die das nicht abbildet, wäre als Laborobjekt ungeeignet.

---

<sup>12</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.6 „Symmetrisch-monoidale Struktur, lokale Operationen & No-Signalling“.

### Definition III.3.1.2: Dichteoperator (Darstellung des Zustands)

In der Quantenkinematik wird ein Zustand durch einen Dichteoperator  $\rho$  auf einem Hilbertraum  $\mathcal{H}_S$  dargestellt mit

$$\rho \geq 0, \quad \text{Tr}(\rho) = 1.$$

[1, 2]

### Formelkasten III.3.1.1: Mischungen (Konvexität)

Werden zwei Präparationen mit Wahrscheinlichkeiten  $\lambda \in [0, 1]$  und  $1 - \lambda$  randomisiert gemischt, so entspricht der gemischte Zustand der konvexen Kombination

$$\rho = \lambda\rho_1 + (1 - \lambda)\rho_2.$$

[1, 2]

*Einordnung (Budget-Logik).* Die Budgetstruktur wird an dieser Stelle nicht in die Normierung  $\text{Tr}(\rho) = 1$  „hineingeschrieben“. Stattdessen wirkt sie als Zulässigkeits- und Kompositionskriterium für Prozesse: Welche Transformationen zwischen Zuständen erlaubt sind, wird im nächsten Kapitel über CPTP-Schließung festgelegt. Damit bleibt die Kinematik sauber von der Dynamik getrennt.

### Von globalen Frames zu lokalen Zuständen

Wenn ein Frame einen globalen Zustand eines Gesamtsystems  $SE$  trägt, dann wird der Zustand eines Teilsystems  $S$  als operatives Coarse-Graining verstanden: Ein Beobachter, der nur auf  $S$  zugreift, fasst alles außerhalb von  $S$  als Umgebung  $E$  zusammen. In der Standarddarstellung entspricht das der partiellen Spur

$$\rho_S = \text{Tr}_E(\rho_{SE}).$$

Diese Form ist kompatibel mit No-Signalling und mit der symmetrisch-monoidalen Komposition: Lokale Beschreibungen entstehen durch Marginalisierung, nicht durch zusätzliche Strukturannahmen.<sup>a</sup>[1, 2]

---

<sup>a</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.6 „Budget-Additivität, lokale Operationen & globale Unabhängigkeit“.

## III.3.2 Messungen als Coarse-Grainings: Effekte und POVMs

Eine Messung ist im FBA keine „magische“ Ausnahme, sondern ein kontrolliertes Coarse-Graining: Sie reduziert die Beschreibung auf einen endlichen Satz von Outcomes. Operativ heißt das: Ein Messausgang ist ein Ereignis, dem wir eine Wahrscheinlichkeit zuordnen, und eine vollständige Messung ist eine Familie solcher Ereignisse, deren Wahrscheinlichkeiten sich zu 1 addieren. In der Standarddarstellung sind diese Ereignisse *Effektoperatoren*.

### Definition III.3.2.1: Effekt und POVM

Ein *Effekt* ist ein Operator  $E$  auf  $\mathcal{H}_S$  mit

$$0 \leq E \leq \mathbb{I}.$$

Eine *POVM* ist eine Familie positiver Operatoren  $\{E_i\}_i$  mit

$$E_i \geq 0, \quad \sum_i E_i = \mathbb{I}.$$

[1, 2]

Die POVM-Bedingung ist genau die formale Fassung von „vollständige Outcome-Liste“: Kein Outcome darf negative Wahrscheinlichkeit erzeugen, und die Summe über alle Outcomes muss 1 ergeben. Die dynamische Implementierung einer Messung als (*Quanten-*)*Instrument* – also als Outcome-indizierte CP-Abbildungen, deren Summe ein CPTP-Kanal ist – und ihre Einbettung in GKLS wird in Teil IV vertieft.<sup>13</sup>

### Beispiel: Projektive Qubit-Messung

Für ein Qubit in der Basis  $\{|0\rangle, |1\rangle\}$  ist die projektive Messung durch

$$E_0 = |0\rangle\langle 0|, \quad E_1 = |1\rangle\langle 1|$$

gegeben. Dies ist eine POVM, weil  $E_0, E_1 \geq 0$  und  $E_0 + E_1 = \mathbb{I}$ .

## III.3.3 Born-Regel: Wahrscheinlichkeiten als Spurkopplung

Wenn Zustände als Vorhersageobjekte und Messausgänge als Effekte feststehen, bleibt nur noch die Frage, wie beide gekoppelt werden. Die Kopplung muss (i) nichtnegativ sein, (ii) bei konvexen Mischungen linear reagieren und (iii) bei vollständigen Messungen auf 1 normieren. In der Operatordarstellung ist dafür die Spurkopplung die kanonische bilineare Wahl.

### Formelkasten III.3.3.1: Born-Regel

Für einen Zustand  $\rho$  und eine POVM  $\{E_i\}_i$  ist die Wahrscheinlichkeit des Outcomes  $i$  gegeben durch

$$p(i) = \text{Tr}(\rho E_i).$$

[1, 2]

<sup>13</sup>Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kapitel IV.2–IV.5 „Messung als CPTP, Instrumente & GKLS“.

### Lemma III.3.3.1: Normierung der Wahrscheinlichkeiten

Für jede POVM  $\{E_i\}_i$  und jeden Zustand  $\rho$  gilt

$$\sum_i p(i) = 1.$$

Die Aussage ist ein reiner Konsistenzcheck: Es genügt die Vollständigkeit der POVM  $\sum_i E_i = \mathbb{I}$  zusammen mit der Zustandsnormierung  $\text{Tr}(\rho) = 1$ .

### Beweisskizze III.3.3.1: Normierung der Wahrscheinlichkeiten

$$\sum_i p(i) = \sum_i \text{Tr}(\rho E_i) = \text{Tr}\left(\rho \sum_i E_i\right) = \text{Tr}(\rho \mathbb{I}) = \text{Tr}(\rho) = 1.$$

### Beispiel: Born-Wahrscheinlichkeiten

Sei  $\rho = |0\rangle\langle 0|$  und  $\{E_0, E_1\}$  wie in Abschnitt III.3.2. Dann ist

$$p(0) = \text{Tr}(\rho E_0) = \text{Tr}(|0\rangle\langle 0|) = 1, \quad p(1) = \text{Tr}(\rho E_1) = 0.$$

*Übergang zum nächsten Kapitel.* Bis hierher haben wir die Kinematikseite fixiert: Zustände, Effekte und ihre Wahrscheinlichkeitskopplung. Nun wird die Dynamikfrage präzise: Welche Transformationen  $\rho \mapsto \rho'$  sind mit Positivität, Normierung, Komposition und No-Signalling kompatibel? Die Antwort ist die CPTP-Klasse, und genau diese Schließung führen wir in Kapitel III.4 aus.

## III.4 CPTP-Kanäle und die Dynamik aus dem FBA

Kapitel III.3 hat die Kinematik festgelegt: Zustände als Dichteoperatoren, Messausgänge als Effekte und Wahrscheinlichkeiten über die Born-Kopplung. Damit ist die Dynamikfrage scharf gestellt: Welche Abbildungen  $\rho \mapsto \rho'$  sind als *zulässige Prozesse* kompatibel mit (i) Positivität und Normalisierung von Wahrscheinlichkeiten, (ii) der Möglichkeit, Nebenregister zu koppeln, und (iii) serieller und paralleler Komposition? Im FBA ist diese Zulässigkeit keine ästhetische Wahl, sondern die minimale Konsistenzforderung an Prozessklassen, wenn man Lokalität und No-Signalling ernst nimmt. Genau diese Schließung führt auf CPTP-Kanäle.<sup>14</sup>[1, 3, 4]

Der Budgetbezug kommt dabei an der richtigen Stelle: Trace-Erhaltung ist keine Budgetgleichung, sondern die Aussage, dass Wahrscheinlichkeiten vollständig bleiben. Budgettreue wirkt als Zulässigkeits- und Implementierungsprinzip: Zulässige Prozesse sind solche, die als lokale Kopplung an Hilfsfreiheitsgrade plus Coarse-Graining (partielle Spur) realisierbar sind. Genau diese Struktur ist die Stinespring-Dilatation und sie ist die Brücke zur FBA-Interpretation als externe Kontierung und mögliche Irreversibilität.[1, 4]

### III.4.1 Zulässige Transformationen: CPTP-Kanäle als dynamische Prozesse

#### Definition III.4.1.1: CPTP-Kanal (zulässige Dynamik)

Ein *Quantenkanal* ist eine lineare Abbildung  $\Phi$  auf Operatoren eines Systems  $S$ , die Zustände auf Zustände abbildet. Er heißt *zulässig* (admissible), wenn gilt:

1. **Vollständige Positivität (CP):** Für jedes *endliche* Nebenregister  $R$  ist  $\Phi \otimes \text{id}_R$  positiv, d. h. für jeden (nicht notwendig normalisierten) positiven Operator  $\rho_{SR} \geq 0$  gilt

$$(\Phi \otimes \text{id}_R)(\rho_{SR}) \geq 0.$$

2. **Spurtreue (TP):**

$$\text{Tr}(\Phi(\rho)) = \text{Tr}(\rho) \quad \text{für alle } \rho.$$

Eine solche Abbildung heißt *CPTP-Kanal*. [1, 4]

*Warum braucht man die vollständige Positivität?* Weil Zustände in Laborrealität nicht isoliert auftreten: Man kann ein System  $S$  mit einem Referenzregister  $R$  verschränken und dann nur auf  $S$  eine Prozedur anwenden. Wäre  $\Phi$  nur positiv, aber nicht vollständig positiv, könnte  $\Phi \otimes \text{id}_R$  aus einem gültigen  $\rho_{SR}$  ein Objekt mit negativen Eigenwerten machen. Dann existiert eine POVM, die negative Messausgangs-Wahrscheinlichkeiten produziert, und das wäre operativ eine Inkonsistenz. Die Forderung CP ist also die mathematische Form von „Wahrscheinlichkeiten bleiben Wahrscheinlichkeiten“ auch unter Erweiterung.[1, 2]

*Warum Spurtreue?* Weil  $\text{Tr}(\rho) = 1$  genau die Normalisierung der Gesamtwahrscheinlichkeit ist. Ein zulässiger Prozess darf Wahrscheinlichkeit zwischen Ausgängen umverteilen, aber nicht „Wahrscheinlichkeit aus dem Nichts“ erzeugen oder vernichten. Das ist die minimale Forderung, bevor man überhaupt über Budgets spricht. Selektive Operationen (Post-Selection) werden später als CP und spurnichterhaltend (trace-nonincreasing) behandelt; hier geht es durchgehend um unselektierte, spurtreue Prozesse.[1, 2]

<sup>14</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.5 „Admissible Channels (CPTP), Kraus/Stinespring & Messung als CPTP“.

### III.4.2 Kraus- und Stinespring-Darstellung: Prozessklassen als Implementierbarkeit

CPTP ist nicht nur ein Axiomenset, sondern zugleich ein Implementierungsstatement: Jeder CPTP-Prozess kann als Kopplung an eine Umgebung plus Coarse-Graining beschrieben werden. Diese Form ist die zentrale Übersetzung in FBA-Sprache: *externe* Kontierung entspricht der kontrollierten Kopplung an zusätzliche Freiheitsgrade, und Irreversibilität entsteht, wenn man die Umgebung anschließend aus der Beschreibung eliminiert.

#### Formelkasten III.4.2.1: Kraus-Darstellung

Eine Abbildung  $\Phi$  ist CPTP genau dann, wenn es Operatoren  $\{K_i\}_i$  (Kraus-Operatoren) gibt mit

$$\Phi(\rho) = \sum_i K_i \rho K_i^\dagger, \quad \sum_i K_i^\dagger K_i = \mathbb{I}.$$

[1, 3]

#### Formelkasten III.4.2.2: Stinespring-Dilatation

Eine Abbildung  $\Phi$  ist CPTP genau dann, wenn es einen Hilbertraum  $\mathcal{H}_E$  (Umgebung), eine Isometrie  $V : \mathcal{H}_S \rightarrow \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$  und eine partielle Spur  $\text{Tr}_E$  gibt mit

$$\Phi(\rho) = \text{Tr}_E(V \rho V^\dagger).$$

Äquivalent kann man  $V$  als Einschränkung einer unitären Dynamik auf  $S \otimes E$  lesen, wenn  $E$  in einem Referenzzustand präpariert wird. [1, 4]

*Hinweis zum Geltungsbereich.* Die Äquivalenzen in Formelkästen III.4.2.1 und III.4.2.2 sind im endlichdimensionalen Fall wörtlich zu lesen; im unendlichdimensionalen Setting arbeitet man standardmäßig mit normalen CP-Abbildungen im Schrödingerbild auf Spurklasseoperatoren, für die Stinespring gilt und Kraus-Zerlegungen ggf. abzählbar/unendlich sind. [2, 4]

#### Beweisskizze III.4.2.1: Kraus $\leftrightarrow$ Stinespring

Aus Formelkasten III.4.2.1 erhält man  $V = \sum_i K_i \otimes |i\rangle_E$ , und  $\text{Tr}_E$  reproduziert die Summe über  $i$ . Umgekehrt entstehen Kraus-Operatoren als Matrixelemente der Isometrie  $V$  in einer Basis von  $E$ . Dieser Zusammenhang ist in Teil I ausgeführt.<sup>a</sup>[1, 3, 4]

---

<sup>a</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.5 „Kraus/Stinespring“.

### Lemma III.4.2.1: Schließung unter Komposition und Nebenregistern

Die Klasse der CPTP-Kanäle ist geschlossen unter

1. **serieller Komposition:**  $\Phi_2 \circ \Phi_1$  ist CPTP, wenn  $\Phi_1, \Phi_2$  CPTP sind,
2. **paralleler Komposition:**  $\Phi_1 \otimes \Phi_2$  ist CPTP,
3. **Erweiterung durch Nebenregister:**  $\Phi \otimes \text{id}_R$  ist CPTP,
4. **Coarse-Graining:** partielle Spur ist CPTP.

*Begründungsskizze.* Kraus-Darstellungen multiplizieren sich unter serieller Komposition und tensorisieren unter paralleler Komposition. Die partielle Spur ist eine spezielle Stinespring-Form und damit CPTP.[1]

Diese Schließung ist genau der Punkt, an dem die FBA-Kompositionslogik und die Standard-QM-Prozessklasse zusammenfallen: Wenn Prozesse als Bausteine eines größeren Netzwerks zulässig sein sollen, dann darf Zulässigkeit nicht an der Systemgrenze zerbrechen. CPTP ist die kleinste, robuste Klasse, die das leistet.

### III.4.3 Budget-Lesart: externe Kopplung, Irreversibilität und Uhranteile

Die Stinespring-Form  $\Phi(\rho) = \text{Tr}_E(V\rho V^\dagger)$  liefert die direkte FBA-Übersetzung: Der reversible Anteil liegt in der unitären Kopplung (als Grenzfall), der irreversible Anteil in der Eliminierung von  $E$  durch  $\text{Tr}_E$ . Damit ist bereits sichtbar, warum „Messung“ in Teil IV als (Quanten-)Instrument auftritt: Messung ist eine kontrollierte Kopplung an ein Register plus anschließendes Coarse-Graining, formal als Familie CP-Abbildungen, deren Gesamtkanal CPTP ist.<sup>15</sup>[1, 2]

---

<sup>15</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.5 „Messung als CPTP“.

## Dynamik und Budgetaufteilung: was hier festgelegt wird

In Teil III verwenden wir Budget nicht, um die QM-Axiome zu ersetzen, sondern um die Zulässigkeit zu motivieren und spätere Unterscheidungen vorzubereiten:

- **Externer Anteil:** Jede nichttriviale Kanalimplementierung entspricht einer Kopplung an Hilfsfreiheitsgrade oder Kontrollregister. Das ist die operative Stelle, an der externe Kontierung in der Bilanz anfällt.
- **Reversibler Grenzfall:** Wenn  $E$  nicht weggetraced wird und die Gesamtdynamik unitär bleibt, ist der Prozess effektiv reversibel.
- **Irreversibler Anteil:** Coarse-Graining durch  $\text{Tr}_E$  macht Information unzugänglich. Im FBA wird genau dieser Schritt später mit Monotonie-Statements (DPI/Spohn) an den irreversiblen Anteil gekoppelt.<sup>a</sup>[8, 9]

Der quantitative Anschluss an Eigenzeit und Alterung wird in <sup>b</sup> und <sup>c</sup> weitergeführt, hier fixieren wir die Prozessklasse, auf der diese Aussagen wohldefiniert sind.

---

<sup>a</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.5 „Spohn-Monotonie & DPI-Pfeil“.

<sup>b</sup>Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Teil IV.

<sup>c</sup>Siehe FBA Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern, Teil VIII.

### III.4.4 Beispiel: Dephasierung als CPTP-Kanal

#### Beispiel: Dephasierung eines Qubits

Die Dephasierung mit Parameter  $p \in [0, 1]$  ist der Kanal

$$\Phi_p(\rho) = (1 - p)\rho + p Z \rho Z, \quad Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eine Kraus-Darstellung ist

$$K_0 = \sqrt{1 - p} \mathbb{I}, \quad K_1 = \sqrt{p} Z,$$

und es gilt  $K_0^\dagger K_0 + K_1^\dagger K_1 = \mathbb{I}$ . Für  $p = 0$  ist  $\Phi_p$  die Identität; für  $p > 0$  werden die Off-Diagonalelemente in der  $Z$ -Basis gedämpft.[1]

*Übergang zum nächsten Kapitel.* CPTP fixiert damit die zulässige Dynamik auf der Ebene diskreter Schritte. Im nächsten Kapitel geht es darum, wie diese Kinematik und Prozessklasse in die gewohnte Hilbertraum- und Operator-Sprache eingeordnet wird: Welche Teile sind Darstellung, welche Teile sind bereits durch Operationalität und Komposition erzwungen? Außerdem wird dort deutlicher, wie Born-Struktur, Instrumente und (später) kontinuierliche GKLS-Flüsse als konsistente Fortsetzung derselben Prozesslogik erscheinen.[5–7]

## III.5 Der Hilbertraum-Formalismus aus dem FBA

Kapitel III.3 und Kapitel III.4 haben die operativen Objekte fixiert: Zustände als Dichteoperatoren, Messausgänge als POVMs (Effekte als Elemente) und zulässige Prozesse als CPTP-Kanäle. Damit stellt sich jetzt nicht mehr die Frage „ob“ man Hilberträume einführt, sondern *wozu*: Der Hilbertraum ist in dieser Abhandlung keine zusätzliche Physik, sondern eine *Darstellung*, in der dieselben operativen Inhalte besonders kompakt und rechentechnisch stabil werden. Genau deshalb behandeln wir ihn an dieser Stelle: Erst wenn Kinematik und Prozessklasse bereits feststehen, ist klar, welche Struktur Hilberträume überhaupt tragen müssen.[1, 2]

Der Leitgedanke ist dabei: Hilbertraum-Sprache ist eine Koordinatensprache für (i) konvexe Zustandsmengen, (ii) lineare Effektfunktionale (Messungen), und (iii) kompositionsstabile Prozessklassen. Die Budgetlogik liefert die Zulässigkeitsleitplanken (Komposition, Lokalität, No-Signalling, CPTP), nicht die lineare Algebra selbst. Die Vollauserbeitung der Darstellungs- und Implementierungssätze (Kraus/Stinespring, Messung als CPTP) steht in den FBA - Grundlagen.<sup>16</sup>

### III.5.1 Vom operativen Zustand zur Hilbertraum-Darstellung

Operativ ist ein Zustand eine Präparationsäquivalenzklasse (Definition III.3.1.1). Eine Darstellungswahl ist gut, wenn sie Mischungen, Marginalisierung und Prozesskomposition ohne Zusatzannahmen trägt. In der Standard-QM leistet das die Dichteoperator-Darstellung auf einem komplexen Hilbertraum.[1, 2]

#### Definition III.5.1.1: Hilbertraum-Darstellung der Kinematik

Für ein System  $S$  wählen wir einen (typischerweise endlichdimensionalen) komplexen Hilbertraum  $\mathcal{H}_S$  und stellen dar:

- **Zustände** durch Dichteoperatoren  $\rho$  auf  $\mathcal{H}_S$  mit  $\rho \geq 0$ ,  $\text{Tr}(\rho) = 1$  (Definition III.3.1.2),
- **Messungen** durch POVMs  $\{E_i\}_i$  mit  $E_i \geq 0$ ,  $\sum_i E_i = \mathbb{I}$  (Definition III.3.2.1),
- **Wahrscheinlichkeiten** durch die Spurkopplung  $p(i) = \text{Tr}(\rho E_i)$  (Formelkasten III.3.3.1),
- **zulässige Prozesse** durch CPTP-Kanäle  $\Phi$  (Definition III.4.1.1).

[1, 2]

Zwei Hinweise verhindern typische Missverständnisse: Erstens sind nicht alle Zustände Vektoren – Vektoren (genauer: Strahlen) beschreiben nur *reine* Zustände. Zweitens ist  $\mathcal{H}_S$  hier nicht das Primärobjekt, sondern die Repräsentationsbühne, auf der Zustände, Effekte und Kanäle eine besonders einfache lineare Form annehmen.

---

<sup>16</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.5 „Kraus/Stinespring, Messung als CPTP“.

### Formelkasten III.5.1.1: Reine Zustände als Grenzfälle

Ein Zustand ist *rein*, wenn er als Rang-1-Projektor  $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$  geschrieben werden kann. Dann gilt  $p(i) = \langle\psi|E_i|\psi\rangle$ . Gemischte Zustände sind konvexe Kombinationen reiner Zustände (Formelkasten III.3.1.1).[1]

## III.5.2 Komposition, Marginalisierung und lokale Tomographie

Die Kompositionslogik ist im FBA vorgegeben: parallele und serielle Komposition müssen zulässig bleiben. Im Hilbertraum-Formalismus ist das tensorielle Produkt die passende Darstellung dieser symmetrisch-monoidalen Struktur.<sup>17</sup>[1]

### Definition III.5.2.1: Komposition von Systemen (Tensorprodukt)

Für zwei Systeme  $A$  und  $B$  ist das zusammengesetzte System  $AB$  durch

$$\mathcal{H}_{AB} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$$

dargestellt. Produktzustände haben die Form  $\rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B$ , allgemeine Zustände  $\rho_{AB}$  erlauben Korrelation und Verschränkung.[1]

Sobald Komposition über  $\otimes$  fixiert ist, ist Marginalisierung als Coarse-Graining eindeutig: Ein Beobachter, der nur  $A$  adressiert, fasst  $B$  als Umgebung zusammen. Das ist genau die partielle Spur.

### Formelkasten III.5.2.1: Marginalisierung durch partielle Spur

Für einen Zustand  $\rho_{AB}$  ist der reduzierte Zustand von  $A$

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}).$$

Für eine lokale Messung  $\{E_i\}_i$  auf  $A$  gilt

$$p(i) = \text{Tr}(\rho_{AB}(E_i \otimes \mathbb{I}_B)) = \text{Tr}(\rho_A E_i).$$

[1]

Diese Gleichung ist der operative Kern von No-Signalling in der Darstellungsform: Was in  $B$  nicht ausgelesen wird, darf die lokalen Wahrscheinlichkeiten in  $A$  nicht verändern, solange nur zulässige lokale Operationen eingesetzt werden.

<sup>17</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.6 „Symmetrisch-monoidale Struktur & Budget-Additivität“.

### Lemma III.5.2.1: No-Signalling in der Operator-Darstellung

Sei  $\Phi_B$  ein CPTP-Kanal auf  $B$ . Dann ändern lokale Operationen auf  $B$  die Marginalen in  $A$  nicht:

$$\rho'_A = \text{Tr}_B((\text{id}_A \otimes \Phi_B)(\rho_{AB})) = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \rho_A.$$

[1, 2]

Der Punkt ist: CPTP auf  $B$  ist spurtreu und damit „verschwindet“ im Heisenberg-Bild nichts auf  $B$ ; kombiniert mit der Definition der partiellen Spur sind lokale Statistiken auf  $A$  invariant. Eine Kraus-Darstellung macht das explizit.[1, 3]

### Beweisskizze III.5.2.1: No-Signalling in der Operator-Darstellung

Sei  $\Phi_B(\cdot) = \sum_k K_k(\cdot)K_k^\dagger$  mit  $\sum_k K_k^\dagger K_k = \mathbb{I}_B$ .

Für jedes Observable  $E_A$  auf  $A$  gilt dann

$$\begin{aligned} \text{Tr}\left(\text{Tr}_B((\text{id}_A \otimes \Phi_B)(\rho_{AB})) E_A\right) &= \text{Tr}\left((\text{id}_A \otimes \Phi_B)(\rho_{AB}) (E_A \otimes \mathbb{I}_B)\right) \\ &= \sum_k \text{Tr}\left((\mathbb{I} \otimes K_k)\rho_{AB}(\mathbb{I} \otimes K_k^\dagger) (E_A \otimes \mathbb{I}_B)\right) = \sum_k \text{Tr}\left(\rho_{AB} (E_A \otimes K_k^\dagger K_k)\right) \\ &= \text{Tr}\left(\rho_{AB} (E_A \otimes \mathbb{I}_B)\right) = \text{Tr}(\text{Tr}_B(\rho_{AB}) E_A). \end{aligned}$$

Da dies für alle  $E_A$  gilt, folgt  $\text{Tr}_B((\text{id}_A \otimes \Phi_B)(\rho_{AB})) = \text{Tr}_B(\rho_{AB})$ .

*Lokale Tomographie.* Im Standard-Formalismus ist der globale Zustand durch hinreichend viele lokale Messstatistiken und ihre Korrelationen bestimmbar. Wir verwenden diese Eigenschaft hier als Standardmerkmal der komplexen Hilbertraum-Darstellung; sie ist nicht automatisch in jeder verallgemeinerten Theorie gegeben.[1] Sie erklärt, warum  $\rho_{AB}$  als Operator auf  $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$  mehr ist als eine Notation: Er ist genau das Objekt, das alle lokal zugänglichen Korrelationen trägt.

### Definition III.5.2.2: Lokale Tomographie (operativer Begriff)

Ein zusammengesetztes System  $AB$  ist *lokal tomographisch*, wenn der Zustand  $\rho_{AB}$  eindeutig durch die Wahrscheinlichkeiten aller Produktmessungen  $\{E_i \otimes F_j\}_{i,j}$  bestimmt ist, das heißt durch

$$p(i, j) = \text{Tr}(\rho_{AB}(E_i \otimes F_j)) \quad \text{für alle POVMs } \{E_i\}_i, \{F_j\}_j.$$

## III.5.3 Symmetrien: Invarianz der Wahrscheinlichkeiten und die Rolle des inneren Produkts

Wenn der Hilbertraum eine Darstellung ist, dann müssen „Koordinatenwechsel“ die Physik unverändert lassen. In der Operator-Sprache heißt das: Wenn wir Zustände und Effekte konsistent transformieren, dürfen Born-Wahrscheinlichkeiten nicht davon abhängen, welche Basis wir gewählt haben. Das fixiert die natürliche Invarianzstruktur und damit auch die

zugehörige Operator-Geometrie in der Praxis.

### Formelkasten III.5.3.1: Hilbert-Schmidt-Struktur und Invarianz

Für Operatoren  $A, B$  auf  $\mathcal{H}$  definiert das Hilbert-Schmidt-Produkt

$$\langle A, B \rangle_{\text{HS}} := \text{Tr}(A^\dagger B).$$

Für jede unitäre Transformation  $U$  gilt Invarianz unter Konjugation:

$$\langle UAU^\dagger, UBU^\dagger \rangle_{\text{HS}} = \langle A, B \rangle_{\text{HS}}.$$

[2]

### Lemma III.5.3.1: Unitäre Symmetrien erhalten Born-Wahrscheinlichkeiten

Sei  $U$  unitär,  $\rho' = U\rho U^\dagger$  und  $E'_i = UE_iU^\dagger$ . Dann gilt für alle Ausgänge  $i$

$$\text{Tr}(\rho' E'_i) = \text{Tr}(\rho E_i).$$

[1]

### Beweisskizze III.5.3.1: Begründung (Invarianz unter Koordinatenwechsel)

Hier wird nur genutzt, dass  $U$  eine Darstellungsänderung ist und die Spur zyklisch ist:

$$\text{Tr}(\rho' E'_i) = \text{Tr}(U\rho U^\dagger UE_iU^\dagger) = \text{Tr}(U\rho E_iU^\dagger) = \text{Tr}(\rho E_i).$$

### Beispiel: Basiswechsel als Symmetrie

Ein Basiswechsel entspricht einer unitären Transformation  $U$ . Ein Zustand  $\rho$  und eine POVM  $\{E_i\}_i$  werden zu  $\rho' = U\rho U^\dagger$  und  $E'_i = UE_iU^\dagger$ . Die beobachteten Häufigkeiten bleiben identisch (Lemma III.5.3.1) – nur die Darstellung ändert sich.

*Budget-Lesart (kurz).* Reversible Dynamik erscheint in dieser Darstellung als unitäre oder isometrische Kopplung, irreversibles Verhalten als Coarse-Graining (partielle Spur) in Stinespring-Form (Formelkasten III.4.2.2). Die detaillierte Verknüpfung von Messung, Dissipation und GKLS-Flüssen wird anschließend in *Dynamik & Messung (GKLS)* systematisch aufgebaut.<sup>18</sup>

*Übergang zum nächsten Kapitel.* Damit ist die Rolle des Hilbertraums präzise: Er ist die Standarddarstellung der in Teil III eingeführten operativen Kinematik und Prozessklasse. Im nächsten Kapitel vergleichen wir dieses Bild explizit mit der Standard-QM-Lesart und markieren, welche Aussagen reine Darstellung sind und welche bereits durch FBA-Zulässigkeit und Kompositionslogik festliegen.

<sup>18</sup>Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Kapitel IV.2–IV.6 „Messung als CPTP, GKLS & operative Irreversibilität“.

## III.6 Vergleich mit der Standard-QM-Kinematik

Nach Kapitel III.3 bis III.5 ist die Kernfrage für diesen Vergleich klar: Wenn Zustände als Dichteoperatoren, Messungen als POVMs und zulässige Prozesse als CPTP-Kanäle bereits feststehen, dann muss der formale Output *mit* der Standard-QM kompatibel sein. Der Vergleich dient daher nicht der „Rettung“ der Konstruktion, sondern der Einordnung: Was ist in Teil III reine Darstellung gemeinsamer Kinematik, und wo bringt der FBA eine zusätzliche, operative Interpretation oder Leitplanke ein?

Dabei ist wichtig, zwischen zwei Ebenen zu unterscheiden: Die Standard-QM liefert die etablierte Operatorrechnung. Der FBA liefert den Lesepfad, warum gerade diese Operatorrechnung als stabile Verdichtung operativer Protokolle und kompositionsstabiler Zulässigkeit auftritt.

### III.6.1 Gemeinsamer Kern: Übereinstimmungen mit der Standard-QM

Im kinematischen Kernbereich fallen FBA und Standard-QM zusammen, weil beide dieselben Minimalanforderungen erfüllen müssen: Wahrscheinlichkeiten dürfen nicht negativ werden, Mischungen müssen linear abgebildet werden, und Prozesse müssen unter Komposition stabil bleiben. Teil III hat diese Anforderungen als *Schließungskriterien* formuliert und dann gezeigt, dass die Standardobjekte sie exakt erfüllen.

#### Übereinstimmungen zwischen FBA und Standard-QM (Kinematik & zulässige Prozesse)

- **Zustände:** Dichteoperatoren  $\rho \geq 0$ ,  $\text{Tr}(\rho) = 1$  (Definition III.3.1.2).
- **Messungen:** Effekte und POVMs  $\{E_i\}_i$ ,  $E_i \geq 0$ ,  $\sum_i E_i = \mathbb{I}$  (Definition III.3.2.1).
- **Wahrscheinlichkeiten:** Born-Kopplung  $p(i) = \text{Tr}(\rho E_i)$  und automatische Normierung  $\sum_i p(i) = 1$  (Formelkasten III.3.3.1 und Lemma III.3.3.1).
- **Komposition & Reduktion:** Tensorprodukt für Zusammensetzung und partielle Spur als Coarse-Graining (Definition III.5.2.1 und Formelkasten III.5.2.1).
- **Zulässige Dynamik (diskret):** CPTP-Kanäle als kleinste Klasse, die Positivität und Normierung auch unter Nebenregistern und Komposition stabil hält (Definition III.4.1.1 und Lemma III.4.2.1).
- **Implementierung:** Kraus- und Stinespring-Form als Standardbeschreibungen derselben Prozessklasse (Formelkästen III.4.2.1 und III.4.2.2).

Damit ist der „Abgleich“ im engeren Sinn erledigt: Solange wir im kinematischen Rahmen von Teil III bleiben, reproduziert der FBA die Standard-QM-Objekte, weil er genau die Strukturbedingungen explizit macht, die man in der Standarddarstellung meist stillschweigend voraussetzt.

### III.6.2 Was neu ist: Interpretation, Metrologie und Leitplanken

Die Unterschiede beginnen nicht bei den Operatoren, sondern bei der Rolle, die sie spielen: In der Standard-QM stehen Hilberträume und Operatoren typischerweise am Anfang. Im

FBA stehen sie am Ende einer Kette aus Abfolge, Komposition und Zulässigkeit. Diese Richtungsumkehr ist keine Philosophiesache, sondern eine technische Klarstellung: Sie sagt, welche Teile der Theorie *aus* Operationalität folgen und welche Teile zusätzliche Modellierung sind.

### Neuerungen im FBA gegenüber der Standarddarstellung (ohne Vorhersageänderung im Kern)

1. **Zeit als Ordnung statt Hintergrundparameter.** In der Standard-QM ist  $t$  meist ein externer Parameter. Im FBA ist die Zeitskala eine streng wachsende Einbettung einer Frame-Abfolge und wird erst durch Kalibration skaliert.<sup>a</sup>
2.  **$c$  als Metrologie statt Postulat.** Die Raumzeit-Skala und die Lichtkegelstruktur werden über Signalfront-Kalibration fixiert. In Teil III wird diese Referenz verwendet, nicht neu hergeleitet.<sup>b</sup>
3. **Zulässigkeit als Kompositionsschluss.** CPTP ist im FBA nicht „Definition der QM“, sondern die kleinste Prozessklasse, die Positivität, Normierung und Erweiterbarkeit unter Komposition garantiert. Das bindet Dynamik an dieselben Leitplanken, die auch No-Signalling tragen (Lemmata III.4.2.1 und III.5.2.1).<sup>c</sup>
4. **Irreversibilität als zusätzliche Struktur, nicht als Geometrieänderung.** Dissipation wird später als monotone Zusatzgröße (DPI/Spohn) mitgeführt, ohne die kinematische Quadrik zu ändern. Das macht Abweichungen realer Protokolle systematisch modellierbar.<sup>d</sup>

<sup>a</sup>Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.3–II.5.

<sup>b</sup>Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.8.

<sup>c</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.5 „Admissible Channels (CPTP) & Messung als CPTP“.

<sup>d</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Kapitel I.5 „Spohn-Monotonie & DPI-Pfeil“.

In dieser Abhandlung bleibt der Punkt (4) absichtlich noch auf der Ebene der Leitplanke: Wir fixieren die Prozessklasse (CPTP) so, dass DPI/Spohn überhaupt wohldefiniert und kompositionsstabil angewendet werden kann. Die dynamische und thermodynamische Auswertung folgt in *Dynamik & Messung (GKLS)* und in *Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern.*<sup>1920</sup>

### III.6.3 Symmetrien: Hintergrundannahme vs. abgeleitete Struktur

Ein möglicher Fehlschluss in Vergleichen lautet: „QM hat Lorentz-Symmetrie als Axiom, FBA nicht.“ Das ist in dieser Form nicht präzise, weil Standard-QM je nach Regime unterschiedliche Hintergrundstrukturen benutzt (nichtrelativistisch: Galilei; relativistisch/QFT: Lorentz). Der saubere Vergleich ist daher: In der Standarddarstellung wird die Raumzeitstruktur als *Hintergrund* vorgegeben, und man fordert Kompatibilität der Dynamik damit. Im FBA entsteht die entsprechende Referenzstruktur im flachen (SR-)Limes aus Kalibration und Quadrik und wird danach als Bühne für Kinematik und Lokalität verwendet.<sup>21</sup>

<sup>19</sup>Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.1–IV.7.

<sup>20</sup>Siehe FBA Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern, Teil VIII.

<sup>21</sup>Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.6–II.8.

### Definition III.6.3.1: Lorentz-Struktur als Referenz aus Kalibration und Quadrik

Im FBA werden Lichtkegel und Lorentz-Isometrien nicht als zusätzliche Postulate eingeführt, sondern als Konsequenz der Budget-Quadrik im flachen, kinematischen (SR-)Limes. Diese Quadrik identifiziert Signalfronten als Nullrichtungen und fixiert damit die Invarianz der Kegelstruktur. Die entsprechende Herleitung ist in *Teil II* ausgeführt.<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.6–II.8.

Für Teil III ist der operative Effekt davon: No-Signalling, lokale Tomographie und die Schließung auf CPTP sind nicht „im luftleeren Raum“ formuliert, sondern auf einer referenzierten Kausalstruktur. Die Ausarbeitung als lokale Feldstruktur und Mikrokausalität wird in *Raumzeit, Lichtkegel & lokale Feldtheorie* vorgenommen.<sup>22</sup>

### Vergleich der Symmetrieebene

- **Standarddarstellung:** Raumzeitstruktur (Galilei oder Lorentz) als Hintergrundannahme; Dynamik und Observablen werden darauf abgestimmt.
- **FBA:** Referenzstruktur (im flachen Limes: Minkowski-Quadrik, Lichtkegel, Lorentz-Isometrien) entsteht aus Kalibration und Bilanz; darauf werden Kinematik (Zustände/Effekte) und Prozesszulässigkeit (CPTP) aufgebaut.<sup>a</sup>

---

<sup>a</sup>Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.9.

Damit ist der Vergleich im Rahmen von Teil III abgeschlossen: Im kinematischen Kern stimmen FBA und Standard-QM in ihren Objekten und Zulässigkeitsklassen überein, während sich der FBA durch die Richtung der Herleitung und die metrologischen Leitplanken auszeichnet. Im folgenden Kapitel III.7 fassen wir die Ergebnisse kompakt zusammen und skizzieren den Anschluss an Dynamik (GKLS), Feldstruktur, Gravitation, Skalenfragen und Testkriterien.

---

<sup>22</sup>Siehe FBA Teil V: Raumzeit, Lichtkegel & lokale Feldtheorie, Abschnitte V.3–V.6.

## III.7 Zusammenfassung und Ausblick

Diese Abhandlung hatte ein klares Ziel: Quantenkinematik nicht als Hilbertraum-Postulat zu starten, sondern als stabile Repräsentation operativer Strukturen, die im FBA bereits angelegt sind. Dazu haben wir die Reihenfolge bewusst so gewählt, dass keine Zirkel entstehen: Zuerst Kinematik (Zustände, Effekte, Born-Kopplung), dann Zulässigkeit (CPTP als kleinste kompositionsstabile Prozessklasse), erst danach die Hilbertraum-Sprache als Darstellung. Die relativistische Referenzbühne (Kalibration,  $c$ , Kegelstruktur) wurde dabei als fixiert übernommen und nicht erneut hergeleitet.<sup>23</sup>

### III.7.1 Rekapitulierung der Hauptpunkte: FBA als Grundlage für die Quantenkinematik

Der Kern dieser Abhandlung lässt sich als Antwort auf drei operative Anforderungen lesen: (1) Präparationen sollen als Vorhersageobjekte vergleichbar sein, (2) Messprotokolle sollen als Wahrscheinlichkeitszuordnung formulierbar sein, (3) Prozesse sollen unter serieller und paralleler Komposition zulässig bleiben, auch bei Nebenregistern. Genau diese Anforderungen führen zu Dichteoperatoren, POVMs, Born-Kopplung und CPTP.

#### Zusammenfassung: Quantenkinematik im FBA (Ergebnisstand Teil III)

- **Zustände als operative Äquivalenzklassen:** Ein Zustand ist, was in allen zulässigen Messprotokollen dieselben Statistiken erzeugt (Definition III.3.1.1). In der Standarddarstellung wird er als Dichteoperator  $\rho$  repräsentiert (Definition III.3.1.2).
- **Messungen als Coarse-Grainings:** Messausgänge sind Effekte, vollständige Messungen sind POVMs (Definition III.3.2.1). Damit sind Wahrscheinlichkeiten automatisch nichtnegativ und vollständig normiert.
- **Born-Kopplung als konsistente Zuordnung:**  $p(i) = \text{Tr}(\rho E_i)$  ist die Spurkopplung zwischen Zuständen und Effekten (Formelkasten III.3.3.1 und Lemma III.3.3.1).
- **Zulässige Prozesse als CPTP:** CPTP ist die kleinste Prozessklasse, die Positivität und Normalisierung auch unter Nebenregistern und Komposition stabil hält (Definition III.4.1.1 und Lemma III.4.2.1). Kraus- und Stinespring-Form sind zwei Darstellungen derselben Zulässigkeit (Formelkästen III.4.2.1 und III.4.2.2).
- **Hilbertraum als Darstellung, nicht als Ausgangspunkt:** Der Hilbertraum-Formalismus wird als kompakte Repräsentationssprache der bereits fixierten Kinematik gelesen (Definition III.5.1.1), inklusive Tensorproduktkomposition und partieller Spur (Definition III.5.2.1 und Formelkasten III.5.2.1).

Damit ist auch der Status der „Relativitätsseite“ in Teil III klar: Wir haben sie nicht als neue Physik eingebaut, sondern als Referenzstruktur verwendet, um Lokalität, No-Signalling und Kausalordnung konsistent mit der Prozesszulässigkeit zu rahmen.<sup>24</sup> Die Herleitung von

<sup>23</sup>Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.5–II.9.

<sup>24</sup>Siehe FBA Teil I: FBA - Grundlagen, Abschnitt I.6.

$c$ , Lichtkegeln und Lorentz-Isometrien liegt in <sup>25</sup>.

### III.7.2 Ausblick: Anschluss an Dynamik, Feldstruktur, Gravitation und Thermodynamik

Der wichtigste Zweck eines kinematischen Teils ist, die Folgefragen präzise formulierbar zu machen. Nach Teil III sind diese Folgefragen jetzt nicht mehr „vage“, sondern technisch bestimmt:

#### Ausblick: Was als Nächstes folgt und warum

1. **Von diskreten Kanälen zu kontinuierlicher Dynamik (GKLS).** CPTP fixiert die zulässige Prozessklasse im diskreten Schrittbild. Für reale Systeme braucht man den Markov- und Stetigkeitslimes und damit GKLS-Generatoren, Instrumente und Messmodelle. Das ist keine neue Kinematik, sondern die kontrollierte Fortsetzung derselben Zulässigkeit in den Kontinuumsfluss.<sup>a</sup>
2. **Messung als Instrument, nicht als Ausnahme.** In Teil III wurde Messung als Effektbeschreibung (POVM) gefasst. Der nächste Schritt ist die dynamische Implementierung: Messung als (Quanten-)Instrument mit Update, Backaction und (falls relevant) Dissipation, d. h. als Familie CP-Abbildungen, deren Gesamtkanal CPTP ist. Genau hier wird die Verbindung zur irreversiblen Struktur (DPI/Spohn) operativ und messnah.<sup>b</sup> Die thermodynamische Auswertung und der Altersbegriff werden später systematisch vertieft.<sup>c</sup>
3. **Lokale Feldstruktur und Mikrokausalität.** Sobald Kegelstruktur und Prozesszulässigkeit feststehen, kann man lokale Generatoren als Dichten formulieren und Mikrokausalität als Aussage über raumartige Trennung operationalisieren. Das ist die Brücke von Quantenprozessen zu lokaler Feldbeschreibung.<sup>d</sup>
4. **Gravitation als Abweichung vom flachen Referenzlimes.** Teil III verwendet die flache Referenzbühne. Der nächste geometrische Schritt ist, zu klären, wie Budget-Gradienten und Rückwirkung eine effektive Krümmung erzeugen und wie sich das in Uhrenraten, Redshift und Dynamik niederschlägt. Das ist keine Änderung der Quantenkinematik, sondern eine Änderung der effektiven Geometrie, auf der sie lokal formuliert wird.<sup>e</sup>
5. **Skalen und Renormierung.** Sobald Prozesse, Kalibration und Messprotokolle zusammenkommen, stellt sich zwangsläufig die Frage, wie Skalen stabil definiert und wie effektive Beschreibungen unter Coarse-Graining laufen. Dafür liefert der FBA eine natürliche Sprache über Budget- und Protokollflüsse.<sup>f</sup>
6. **Tests und Pass/Fail-Kriterien.** Der Mehrwert der Rekonstruktion ist, dass Zulässigkeit, Kalibration und Irreversibilität als separate, prüfbare Bausteine vorliegen. Daraus lassen sich Protokolle ableiten, die SR/QM-Grenzfälle reproduzieren müssen und Abweichungen als klare Fail-Signaturen ausweisen.<sup>g</sup>

<sup>a</sup>Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.2–IV.6.

<sup>b</sup>Siehe FBA Teil IV: Dynamik & Messung (GKLS), Abschnitte IV.2–IV.7.

<sup>c</sup>Siehe FBA Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern, Abschnitte VIII.6–VIII.8.

<sup>d</sup>Siehe FBA Teil V: Raumzeit, Lichtkegel & lokale Feldtheorie, Abschnitte V.3–V.6.

<sup>e</sup>Siehe FBA Teil VI: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen, Abschnitte VI.3–VI.5.

<sup>f</sup>Siehe FBA Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung, Abschnitte VII.1–VII.4.

<sup>g</sup>Siehe FBA Teil X: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA  $\rightarrow$  QM  $\leftrightarrow$  ART, Abschnitte X.6–X.8.

<sup>25</sup>Siehe FBA Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie, Abschnitte II.6–II.8.

*Schlussbemerkung.* Teil III ist damit bewusst „kinematisch scharf“: Er legt fest, welche Objekte und Prozessklassen überhaupt sinnvoll sind, bevor man sie dynamisch oder geometrisch weiter ausbaut. Genau diese Trennung ist später entscheidend, um zwischen (1) Darstellungsfragen, (2) dynamischen Annahmen (Markov, Stetigkeit, Lokalität), und (3) geometrischen Abweichungen vom Referenzlimes sauber unterscheiden zu können.

### III.8 Anhang: Überblick über die FBA-Reihe (Teile I–X)

Klick auf den Titel zum Download des PDF

1. **Teil I: FBA-Grundlagen: Abfolge, Budget, Eigenzeit & Pfeile.** *Ziel:* Basisschicht bereitstellen: Abfolge, Budget, Eigenzeit/Alterung, Front und operativer Zeitpfeil (DPI); Minkowski-Limes aus der Budget-Quadrik; zulässige Dynamik und Lokalität/No-Signalling. *Import:* – (Referenz für alle Folgeteile). *Erweiterung:* Schnittstellenverträge, Pass/Fail-Checklisten, Lesefaden.
2. **Teil II: Zeit, Eigenzeit & Minkowski-Geometrie.** *Ziel:* Eigenzeit/Quadrik operativ fassen und Geodäten ableiten. *Import:* Grundlagen (Abfolge, Budget, Eigenzeit, Front/DPI). *Erweiterung:* glatter Limes, Variationsprinzip auf Weltlinien, Kalibration  $\kappa_\tau$ .
3. **Teil III: Quantenkinematik & CPTP-Kanäle.** *Ziel:* Zustandsräume und Kanäle (CPTP) samt Komposition. *Import:* Grundlagen (Budget, Kanalsicht, Komposition). *Erweiterung:* konkrete Divergenzen/Kostenfunktoren  $\mathcal{C}$ , Messungen und Klassik-Register.
4. **Teil IV: Dynamik, Messung & GKLS (offene Systeme).** *Ziel:* Kontinuierliche offene Dynamik (GKLS) und operativer Zeitpfeil. *Import:* Kanäle/DPI. *Erweiterung:* Spohn-Monotonie, stationäre/NESS-Referenzen, Flüsse  $b^{\text{rev}}, b^{\text{irr}}, b^{\text{ext}}$ .
5. **Teil V: Raumzeit, Lichtkegel & lokale Feldtheorie.** *Ziel:* Lokale Feldgleichungen unter Front/Lokalität. *Import:* Front, Komposition, No-Signalling. *Erweiterung:* lokale GKLS-Generatoren, Lieb–Robinson-artige Schranken, effektive Lichtkegel.
6. **Teil VI: Gravitation & Geometrie aus Budgetflüssen.** *Ziel:* Geometrisierung von Budgetflüssen. *Import:* Budget-Quadrik/Eigenzeit. *Erweiterung:* effektive Metriken aus Kalibrationen  $(\kappa_t, \kappa_x)$  und internen Spannungen; Kopplung an Krümmung.
7. **Teil VII: Konstanten, Skalen & Renormierung.** *Ziel:* Skalenführung der Kalibrationssätze. *Import:*  $c = \kappa_t/\kappa_x, \kappa_\tau$ . *Erweiterung:* Flow-Gleichungen für  $\kappa_t, \kappa_x, \kappa_\tau$ ; Stabilität von  $c$ .
8. **Teil VIII: Klassischer Limes, Thermodynamik & Altern.** *Ziel:* Makroskopik aus  $A[\gamma]$  (Alterung) und DPI. *Import:* Eigenzeit/Alterung, Spohn. *Erweiterung:* Entropieproduktion, Euler–Lagrange-Formen für irreversible Flüsse, effektive Transportgleichungen.
9. **Teil IX: Kosmische Dynamik, Time Dilation & Inflation (TDI).** *Ziel:* Kosmische Abfolge & Kalibrationsfluss. *Import:* Budget, Eigenzeit/Front. *Erweiterung:* Budgetgleichungen auf großskaligen Slices; Time-Dilation-Inflation als Kalibrationsdynamik.
10. **Teil X: Vorhersagen, Falsifizierbarkeit & Brücke FBA  $\rightarrow$  QM  $\leftrightarrow$  ART.** *Ziel:* Testbare Differenzen und Brücken FBA  $\leftrightarrow$  QM/ART. *Import:* alle Grundlagenbausteine. *Erweiterung:* Protokolle, Grenzfalltests, überbestimmte Konsistenzrelationen (Pass/Fail).

## Literatur

- [1] M. A. Nielsen und I. L. Chuang. *Quantum Computation and Quantum Information. 10th Anniversary Edition*. Cambridge: Cambridge University Press, 2010. ISBN: 9781107002173.
- [2] A. S. Holevo. *Quantum Systems, Channels, Information. A Mathematical Introduction*. Berlin, Boston: De Gruyter, 2012. DOI: 10.1515/9783110273403.
- [3] K. Kraus. *States, Effects, and Operations: Fundamental Notions of Quantum Theory*. Bd. 190. Lecture Notes in Physics. Berlin, Heidelberg: Springer, 1983. DOI: 10.1007/3-540-12732-1.
- [4] W. F. Stinespring. „Positive Functions on  $C^*$ -Algebras“. In: *Proceedings of the American Mathematical Society* 6.2 (1955), S. 211–216. DOI: 10.2307/2032342.
- [5] G. Lindblad. „On the Generators of Quantum Dynamical Semigroups“. In: *Communications in Mathematical Physics* 48.2 (1976), S. 119–130. DOI: 10.1007/BF01608499.
- [6] V. Gorini, A. Kossakowski und E. C. G. Sudarshan. „Completely Positive Dynamical Semigroups of  $N$ -Level Systems“. In: *Journal of Mathematical Physics* 17.5 (1976), S. 821–825. DOI: 10.1063/1.522979.
- [7] H.-P. Breuer und F. Petruccione. *The Theory of Open Quantum Systems*. Oxford: Oxford University Press, 2002. ISBN: 9780199213900.
- [8] D. Petz. „Sufficient Subalgebras and the Relative Entropy of States of a von Neumann Algebra“. In: *Communications in Mathematical Physics* 105.1 (1986), S. 123–131. DOI: 10.1007/BF01212345.
- [9] H. Spohn. „Entropy Production for Quantum Dynamical Semigroups“. In: *Journal of Mathematical Physics* 19.5 (1978), S. 1227–1230. DOI: 10.1063/1.523789.